倉田令二朗監修［数学基礎論シリーズ３巻］

# モデルの理論

坪井明人 著

河合文化教育研究所

# 目　　次

# モデルの理論

坪 井 明 人

# はじめに

モデル論は何かということを議論しはじめるとかなり哲学的になってしまう．酒席での話題にはふさわしいとしても，多くを語ったところで，なかなかよくは分かってもらえない．数学全般に言えることかも知れないが，結局は自分で頭と手を動かしてみないと本当のことは分からないのである．しかしながら，あえて説明を試みることにする．注意すべきは，あくまでも以下に書くことは著者の解釈であって，本当に正しい解釈かどうかの判断はこの本を読み終えた読者に委ねたいと思う．

モデル論の特徴あるいはもっと一般に数学基礎論の特徴は，数学で使う「ことば」そのものも考察の対象にする点である．このことについて少し考えてみよう．数学で扱う対象は数学的な構造だが，構造という「実体」（あるいは共通の誤解のもとに存在すると思われている実体）は「ことば」によって記述される．自然界こそが「実体」でその現象を数学的に「ことば」で記述して議論する場合は確かに「実体」は存在するように思われる．しかし抽象的な数学において「実体」が何かははっきりしない．むしろ「ことば」によって記述されることにより初めて「実体」も存在する．

標語的に言えば，「ことば」と「実体」は鶏と卵のようなもの，こちらが主あちらが従というものではない．この立場に立てば，「実体」の考察だけでなく同時に「ことば」の数学的考察も意味があることだと気づくはずである．

おおまかに言えば，モデル論では「ことば」と「実体」の間の関係を考察する．「ことば」を考察するのに再び「ことば」を使うわけだから，対象としての「ことば」と，数学的に解析するために用いる手段としての「ことば」を分けて考えなければならない．我々の立場では，前者の「ことば」とは1階論理式のことになる．「ことば」と「実体」の間の関係の考察とは，より正確には1階論理式の表現能力の考察になる．

「実体」を「ことば」を使って記述したとき，その記述された性質から逆にもと

の「実体」を再構成できるだろうか？「ことば」を1階論理式のこととすれば，再構成はできない．Löwenheim-Skolem の定理によれば，濃度の概念は1階論理式（の集合）では記述不可能なのである．もとの構造とまったく同じ1階論理式が成立するにも拘らず濃度が異なる構造が存在するわけである．具体的な数ベクトルの集合 $\mathbf{R}^n$ の性質を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間の公理として抜きだしたとする．この公理はある意味で完全である．実際に1階論理式で表された命題はこの公理だけから証明または反駁される．しかし次元までは規定できないために，無限次元の（さらには非可算次元の）ベクトル空間というやや抽象的な構造もでてきてしまう．このような現象が一般に成立するという主張が Löwenheim-Skolem の定理である．ではさらに濃度も指定されれば，構造は再構成されるだろうか？　残念ながらそれも一般には不可能である．

公理 $T$ を満たす濃度 $\lambda$ の構造の中で同型でないものの個数を $I(\lambda, T)$ とかく．上で説明したように，$I(\lambda, T) = 1$ とは限らないので，$\lambda$ の関数 $I(\lambda, T)$ の振舞いを決定することは重要な問題となる．この場合公理 $T$ は完全なものを主に考える．$\mathbb{Z}_2$ の可算直和 $\mathbb{Z}_2^{(\omega)}$ と $\mathbb{Z}_4$ の可算直和 $\mathbb{Z}_4^{(\omega)}$ が同型でない理由と $\overline{\mathbb{Q}}$ と $\overline{\mathbb{Q}(\pi)}$ が同型でない理由は本質的に異なる．前者はすでに1階論理式でその違いが区別されるが後者は1階論理式では区別されない，すなわち同じ完全な公理（代数閉体の公理）を満たすのに次元の違いにより非同型となる．我々は後者のような自明でない非同型に興味を持つ．

非同型な構造の個数を数えることがどうして重要な問題なのだろうか．それは個数を数えるためには構造の詳しい解析が必要だからである．構造の中に隠れた本質的構造を発見しなければならない．また構造を決定する因子があるか，どのような種類の因子があるかを判断しなければならない．これが重要な問題なのである．

構造の解析についてもう少し具体的に考えてみよう．公理 $T$ を満たす構造 $M$ の解析を我々は以下のように行いたい：

1．まず $M$ の元の間に独立の概念を導入する．

2．その独立概念をもとに $M$ の極大な独立部分集合 $I$ をとる．

3．$M$ は $I$（あるいは $I$ の濃度）によって決定されることを示す．

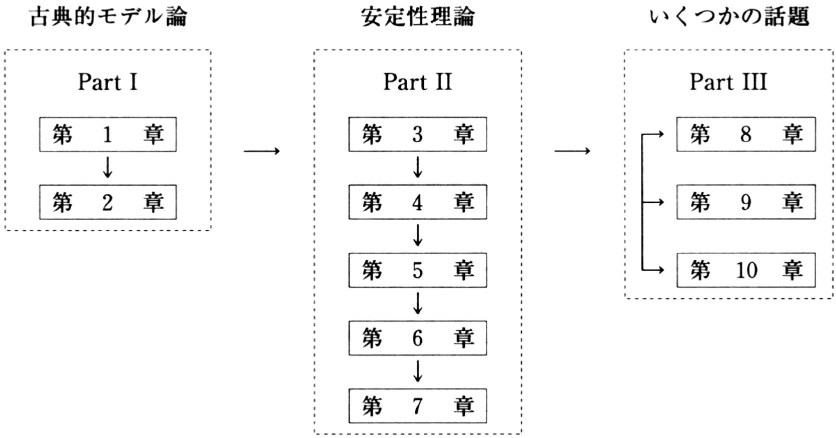
もちろんこのような単純な方針で構造解析ができるのは非常に限られた場合である．第一の問題点として，独立概念が導入できるかどうかがわからない．第二に，独立な極大部分集合の濃度が一意的に決まるかどうかがわからない．さらに次元が一種類だけかどうかがわからないし，またその次元で構造が決定されるかどうかもわからないのである．しかし $T$ に条件をつければ，ある種の構造解析が可能になることが知られている．

最後になったが，本書を書こうとした動機は次の二つである．

- モデル論を扱った日本語の本が少ない；
- 外国語の良い本はあるが，その重要な部分に到達する前に力つきる人が多い．

最近の結果が理解できる必要最小限の知識が，短期間にそして力つきる前に，身につくことを目標に本書を書いた．この場合に，重要な定理や概念を網羅することは考えなかった．むしろモデル論の有名な定理を題材にモデル論特有の議論の仕方，よく使われる論法を紹介することを目指した．古典的な定理からはじめて比較的最近の結果までを証明をつけて紹介する．その際に，概念はできるだけ少なくして最短距離の証明を目指する．したがって重要であるにもかかわらず全くふれていない事柄も数多くある．また多くの補題を用意して定理の証明は1行というスタイルはとらなかった．できるだけアイディアを定理の証明の中に現れるようにした．このため似たような議論が複数箇所に現れる場合もある．

以下に本書の構成，読み方の順を図にしておく．




なお演習問題には有限個の例外を除いてすべてヒントがついている[†]．したがってこれらの問題はできる限り解くようにしていただきい．本書の主要部は140頁しかない．1日1頁ずつ読めば5カ月で読める．1日2頁ならば2カ月半，1日10頁頑張って読めば2週間で読み終えられるようにできている[‡]．

† つまらない冗談である．
‡ これもつまらない冗談である．

# I　古典的モデル論

# 第1章　言語と構造

## 1.1　準備

本書では大学の1,2年生程度の数学の知識を仮定する．その中で特に重要なのは素朴集合論の知識である．なお我々の立場では，選択公理は常に仮定する．

記号の説明とともに，いくつかを復習しておく．

**定義1（順序数と基数）**

1．順序集合 $X=(X;<)$ の部分集合 $Y$ が「$x<y$, $y\in Y \Rightarrow x\in Y$」を満たすとき $X$ の切片とよばれる．

2．順序集合 $X$ の勝手な空でない部分集合が最小元を持つとき，$X$ は整列順序集合とよばれる．整列順序集合はもちろん全順序集合である．二つの整列順序集合 $X$ と $Y$ が与えられたとき，必ず一方は他方の中に切片として埋め込める．またその埋め込みの仕方は一意的である．$X$ が $Y$ の中に埋め込めるとき，$X\leq Y$ として整列順序集合全体に新たな順序を定義する．このとき「$X\leq Y$ かつ $Y\leq X$」は同値関係になる．その同値類を順序数とよぶ．（別の言い方をすれば整列順序集合の順序型を順序数とよぶわけである．）順序数は $\alpha$, $\beta$（ときに $i,j$）などで表される．個々の自然数は自然に順序数と考えることができる．例えば3は3個の点が全順序で並んだ順序集合の同値類である．また自然数全体$\{0,1,2,\cdots\}$も順序数になる．これを $\omega$ で表わす．一方整数全体 $\mathbf{Z}$ は順序数ではない，実際この集合には最小元が存在しない．通常，順序数 $\alpha$ をそれより小さい順序数全体の集合と同一視する．例えば，$5=\{0,1,2,3,4\}$である．この同一視により，$\beta<\alpha \Longleftrightarrow \beta\in\alpha$ が成立する．

3．順序数 $\alpha$ がそれより小さいどんな順序数との間にも全単射を持たなければ，$\alpha$ は基数とよばれる．例えば順序数5は5個の元よりなる集合だが，5より

小さな順序数は5個の元を持たない．したがって，5は基数である．同様に$\omega$も基数である．$\kappa$，$\lambda$などは基数を表わすとする．また多くの場合，それは無限基数である．異なる基数の間には全単射は存在しない．

4．小さい方から順に数えて$\alpha$番目の無限基数を$\aleph_\alpha$で表わす（ただし最初は0番目）．$\aleph_0=\omega$である．

5．集合$A$との間に全単射が存在する基数（選択公理によりただ一つ存在する）を$A$の濃度といい$|A|$で表わす．集合$A$が可算であるとは，$|A|\leq\aleph_0$のことである．ただし本書では多くの場合$|A|=\aleph_0$を意味する．

6．順序数$\alpha$の次に大きい順序数を$\alpha+1$で表わす．基数$\kappa$の次に大きい基数を$\kappa^+$で表わす．$\kappa$が無限ならば$|\kappa+1|=\kappa$であるが，$\kappa^+>\kappa$である．また$\aleph_{\alpha+1}=(\aleph_\alpha)^+$である．

7．順序数$\alpha$に直前の順序数が存在する場合とそうでない場合がある．前者の場合$\alpha=\beta+1$とかける．後者の場合はこのような$\beta$はなく，$\alpha$は極限順序数とよばれる．$\omega$は極限順序数の例である．さらに一般に，無限基数は順序数として極限順序数である．

8．基数$\kappa$をそれより小さい基数の列で近似するとき，その近似列の最短の長さをcf$(\kappa)$で表わす．すなわち$\kappa=\sup\{\lambda_i : i<\alpha\}$（$\lambda_i<\kappa$）と表し得る最小の順序数$\alpha$である．自明にcf$(\kappa)$は基数となる．cf$(\kappa)=\kappa$のとき$\kappa$は正則であるという．一言で言えば，正則基数は近似ができない基数である．$\kappa^+$は常に正則である．$\kappa=|A|$が正則基数のときは，$A=\bigcup_{i<\lambda}A_i$，$\lambda<\kappa$，$|A_i|<\kappa$ $(i<\lambda)$という$A$の分解はできない．また$\kappa$が正則で，$B=\bigcup_{i<\kappa}B_i$，$B_i\subset B_j$（$i<j<\kappa$）とすれば，濃度が$\kappa$未満の$X\subset B$はどれかの$B_i$の中に含まれていることもわかる．

我々は選択公理を仮定しているので，任意の集合$A$は，その元を順序数の順序で1列に並べることができる．すなわち適当な順序数$\alpha$によって$A=\{a_\beta : \beta<\alpha\}$とできる．集合をこのように1列に並べておき，元を順番に操作するという議論は

モデル論では随所に現れる．$\alpha=\omega$ の場合は普通の帰納法による議論である．しかし $\alpha$ が $\omega$ より大きいときは，$\beta<\alpha$ が極限順序数の場合とそうでない場合で議論が分かれる．

**例 2**　環 $(R;0_R,1_R,+,\cdot)$ には極大イデアルが存在する：$R$ を順序数 $\alpha$ の順序で１列にならべて $R=\{a_i:i<\alpha\}$とする．$I_0=\{0_R\}$として，イデアルの列 $I_i\subset R$，$1_R\notin I_i$ を順に作ってゆく．構成法は：

- $i=j+1$ のとき，$I_j\cup\{a_j\}$で生成されるイデアル $I^*$ が全体に一致（$1_R$ を含む）ならば $I_i=I_j$ とする．そうでなければ，$I_i=I^*$ とする．
- $i$ が極限順序数のとき，$I_i=\bigcup_{j<i}I_j$ とする．（$1_R\notin I_i$ である．）

このとき，$I=\bigcup_{i<\alpha}I_i$ が求める極大イデアルになる．

**定義 3**

1．二つの集合 $A$，$B$（$|A|=\kappa$，$|B|=\lambda$）に対して，

（a）　$A\cap B=\emptyset$ ならば，$A\cup B$ の濃度を $\kappa+\lambda$ で表わす；

（b）　$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$の濃度を $\kappa\cdot\lambda$ で表わす；

（c）　$A$ から $B$ への関数全体を ${}^{A}B$ で表わし，その濃度を $\lambda^{\kappa}$ で表わす．

$\kappa$ と $\lambda$ のいずれかが無限ならば，$\kappa+\lambda$ と $\kappa\cdot\lambda$ に差異はなく，それは $\max\{\kappa,\lambda\}$ に等しい．$|{}^{\kappa}\lambda|=\lambda^{\kappa}$ である．${}^{\alpha}B$ は定義により，$\alpha$ から $B$ への関数全体だが，それは長さ $\alpha$ の $B$ の元の列全体だと思うことができる．特に ${}^{\omega}2$ は長さ $\omega$ の0, 1列全体である．長さ $\alpha$ 未満の $B$ の元の列全体は ${}^{\alpha>}B$ で表わし，その濃度を $|B|^{<\alpha}$ で表わす．特に ${}^{\omega>}2$ は0, 1 の有限列全体である．$\kappa$ が無限なら一般に $\kappa^{<\omega}=\kappa$ である．また $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}>\kappa$ や $\mathrm{cf}(2^{\kappa})>\kappa$ も比較的簡単にわかる．

2．(無限)列は $\eta$，$\nu$ などで表わす．有限列は $\bar{a}$，$\bar{x}$ などのように記号の上に線をひいて表わす．列の長さを $\mathrm{lh}(\eta)$，$\mathrm{lh}(\bar{a})$ などで表わす．列 $\eta$ の直後に列 $\nu$ を並べてできる列を $\eta^\frown\nu$ とかく．$\eta'=\eta^\frown\nu$ となる $\nu$ があるとき $\eta\subset\eta'$ とかく．誤解の恐れのない場合は $\bar{a}\in{}^{\omega>}A$ のことを単に $\bar{a}\in A$ とかく．

**定義4（その他の記号）**

1．集合 $A$，$B$ に対して，$A-B=\{a : a\in A,\ a\notin B\}$.

2．関数 $f : A\to B$ と $A_0\subset A$ に対して，$f|A_0$ は関数 $f$ の定義域を $A_0$ に制限した関数を表わす.

3．集合族 $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ に対して，

$$\bigcup\mathcal{A}=\{a : a \text{ はいずれかの } A_i \text{ の元}\}.$$

$\bigcup\mathcal{A}$ は $\bigcup_{i\in I}A_i$ とかくこともある.

4．条件……がどんな $a\in A$ に対しても成立することを，……$(\forall a\in I)$ と表わす.

また適当な $a\in I$ に対して，……が成立することを，……$(\exists a\in I)$ と表わす.

モデル論の本題に入る前に有名な論法を紹介しておく.

**例5（往復論法 (back and forth argument)）**　$(M_1,<_1)$ と $(M_2,<_2)$ はともに可算無限の稠密全順序集合とする．さらにどちらにも最大元，最小元はないとする．このとき，$M_1$ と $M_2$ は順序同型である：$M_1=\{a_i : i\in\omega\}$，$M_2=\{b_i : i\in\omega\}$という具合いに，それぞれを並べておく．順序を保存する写像 $f : M_1\to M_2$ を順に構成してゆく．最初に $c_0=a_0$ として，$c_0\in M_1$ の $f$ による行き先は勝手な元 $d_0\in M_2$ とする．次に $d_1=b_0\in M_2$ として，$c_1\in M_1$ を

- $c_0, c_1$ の $M_1$ での並び方 $=d_0, d_1$ の $M_2$ での並び方

となるように選ぶ．これは $M_1$ が稠密で最大元，最小元を持たないことから可能である．次には，$c_2=a_1\in M_1$ として，$d_2\in M_2$ を

- $c_0, c_1, c_2$ の $M_1$ での並び方 $=d_0, d_1, d_2$ の $M_2$ での並び方

となるように選ぶ．これは $M_2$ が稠密で最大元，最小限を持たないことから可能である．以下同様に，偶数$(2n)$番目では $c_{2n}=a_n\in M_1$ として，対応する $d_{2n}\in M_2$ を選ぶ．奇数$(2n+1)$番目では $d_{2n+1}=b_n$ として，対応する $c_{2n+1}\in M_1$ を選んでゆく．このとき，対応 $f : c_n\mapsto d_n$ は全単射で順序を保存する写像になっている．すなわ

ち $M_1$ と $M_2$ の順序同型を与えることになる.

## 1.2 言語

式 $(a+b)^2=a^2+b^2$ は正しいだろうか. それはどこで考えているかによる. 実数上では一般には正しくないが, 標数が 2 の体の上では常に正しい式になる. すなわち式という形式は, その式を解釈する場が与えられるごとに意味を持ち, 真偽が決定されるわけである. 式自体が意味を持っているわけではない. 以上のことを頭に入れておいてほしい.

さて数学を展開するためには, 定数記号, 関数記号, 述語記号が必要になる. これら 3 つを合わせて, その数学の言語という. ただし我々の立場では関数記号は変数が有限個の関数記号, 述語記号も有限個の変数のものだけを扱う. 例えば群を扱う数学では言語として定数記号$\{e\}$, 2 変数関数記号$\{*\cdot*\}$, 1 変数関数記号$\{*^{-1}\}$が最低限必要になるだろう. また順序体を扱う数学では定数記号$\{0,1\}$, 2 変数関数記号$\{*+*, *\cdot*\}$, 1 変数関数記号$\{-*, *^{-1}\}$, また 2 変数述語記号$\{*<*\}$などが必要になるだろう. 言語は通常 $L, L_1, \cdots$ などで表される. 数学を記述するのに言語以外で必要なのは変数記号$\{x, y, x_0, y_0, \cdots\}$, 論理記号 $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists\}$と等号 $=$ である. $\wedge$ は「かつ」, $\vee$ は「または」, $\rightarrow$ は「ならば」, $\neg$ は「否定」, $\forall$ は「すべて」そして $\exists$ は「存在」を表わすための記号であるが, この段階ではまだ単なる記号で意味を持たない. これら変数記号と論理記号は数学の種類に依存しない共通のものである. なお我々の立場では, 変数記号は元をあらわすものだけを用意し, 集合をあらわすものは考えない.

記号を並べて行くことにより数学的な命題が表現されるわけであるが, 勝手に並べてよいわけではない. まず項の概念を定義する. 簡単に言うと, 項はその言語にある関数記号たちの形式的な合成関数のことである.

**定義 6** 次の規則によって作られるものを $L$ の項(term)とよぶ.

1. 変数記号は $L$ の項である.

2．$L$の定数記号は $L$ の項である．

3．$t_1, \ldots, t_n$ が $L$ の項 で，$F$ が $L$ の $n$ 変数関数記号ならば $F(t_1, \ldots, t_n)$ は $L$ の項である．

4．以上 1-3 の繰り返しによってできるものだけが $L$ の項である．

上のような定義を帰納的な定義という．また通常 4 の条件は定義の中から省略する．$F$ が $L$ の 2 変数関数記号，$c$ が $L$ の定数記号のとき，$F(c, x)$，$F(F(x, y), c)$ などは $L$ の項になる．項 $t$ を特に $t(x_1, \ldots, x_n)$ とかけば，$t$ の中の変数記号は $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に含まれることを意味している．

項は命題（論理式）の中で主語や目的語になる部分である．これらと述語記号，論理記号を組み合わせて論理式を作る．

**定義 7**　言語 $L$ の項と論理記号から次の1-3により帰納的につくられるものを $L$ の一階論理式 (first order formula in $L$) あるいは簡単に $L$-論理式 ($L$-formula)，論理式 (formula) などとよぶ．

1．$t$，$s$ が $L$ の項のとき $t=s$ は $L$ の論理式である．

2．$t_1, \ldots, t_n$ が $L$ の項，$P$ が $L$ の $n$ 変数述語記号ならば，$P(t_1, \ldots, t_n)$ は $L$ の論理式である．

3．$\varphi$，$\psi$ が $L$ の論理式，$x$ が変数記号ならば，$(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$, $\neg(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$, $\forall x(\varphi)$ は $L$ の論理式である．

$P$ が 2 変数の述語記号，$x, y$ が変数記号，$t_1, t_2$ が項のとき $P(t_1, t_2)$，$\forall x(P(x, t_1))$，$\forall x(\exists y(P(x, y)))$，$\forall y(\forall z(((P(x, y)) \wedge (P(x, z))) \rightarrow (y=z)))$ などは $L$ の論理式である．表現を簡潔にするため，論理記号の結合力に強弱を仮定する．$\forall$, $\exists$ と $\neg$ が一番強く，その次に $\wedge$ と $\vee$，一番弱いのが $\rightarrow$ とする．こうすることで，括弧をある程度は省略してかける．また一番内側の括弧も省略し，かぎ括弧も適宜使うことにすれば，さらに見やすい論理式が得られる．上の最後の例は $\forall x \forall y[P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y=z]$ とかいたりする．$\bar{x}$ が列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のとき，$\forall x_1(\forall x_2(\cdots(\forall x_n \varphi)\cdots))$ の省略形として，$\forall \bar{x} \varphi$ を用いることがある．$\exists$ に関しても同様であ

る．$F=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ が論理式の有限集合のとき，$\varphi_1 \wedge (\cdots \wedge (\varphi_{n-1} \wedge \varphi_n) \cdots)$ の省略形として $\wedge F$ を用いることにする．$\theta_1 \longleftrightarrow \theta_2$ は $(\theta_1 \rightarrow \theta_2) \wedge (\theta_2 \rightarrow \theta_1)$ の省略形である．同様に $\vee F$ も $F$ に属する論理式を $\vee$ で結合したものである．一般に論理式を表すために $\varphi$ や $\psi$ などのギリシャ文字を用いる．

さて論理式の中の変数には束縛変数と自由変数の2種類がある．簡単に言えば，論理記号 $\forall$ や $\exists$ がかかってくる変数が束縛変数でそうでないものが自由変数である．もう少し正確に定義するためにはこれらにも帰納的な定義が必要である：論理式 $\varphi$ の中に論理記号 $\forall$ や $\exists$ がなければ，$\varphi$ の中のすべての変数は自由変数である．$\varphi$ の中の変数 $x$ が自由変数ならば論理式 $\forall x\varphi$ や $\exists x\varphi$ において$x$ は（この $\forall x$ や $\exists x$ によって束縛された）束縛変数になる．例えば $\forall y \forall z[P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y=z]$において $x$ は自由変数であるが，$y$ や $z$ は束縛変数である．同じ名前の変数でも現れる場所によって自由変数になったり束縛変数になったりする．$\forall x P(x, x) \wedge \forall y P(x, y)$ では $\wedge$ の前にある $x$ は束縛変数，$\wedge$ の後の $x$ は自由変数である．自由変数がない論理式を閉論理式（closed formula）あるいは文（sentence）とよぶ．$\forall x \exists y P(x, y)$ は閉論理式である．また $t_1, t_2$ の中に変数記号が現われなければ，$P(t_1, t_2)$ や $\forall x P(x, t_1)$ も閉論理式になる．論理式 $\varphi$ を $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ とかいた場合は，$\varphi$ の中の自由変数は$\{x_1, \ldots, x_n\}$に含まれることを意味している．

最初にも述べたが，論理式は単なる記号の列でそれ自体が意味を持つものではない．論理式を解釈する場（構造）が与えられることによりはじめて意味が決定する．

## 1.3 構造

言語 $L$ 自体は意味を持たない単なる記号の集合である．$L$ に解釈を与えるとは $L$ に対応する構造を与えることである．簡単のために $L=\{c, F, P\}$の場合を考えよう．ここで $c$ は定数記号，$F$ は $m$ 変数関数記号，$P$ は $n$ 変数述語記号である．$M$ を空でない集合とし，定数記号 $c$ に対しては $M$ の特定の元 $c^M$（定数），$m$ 変数関数記号 $F$ には $m$ 変数関数 $F^M: M^m \rightarrow M$, $n$ 変数述語記号 $P$ には $P^M \subset M^n$ が定

まっているとき，対

$$(M\,;\,c^M,\ F^M,\ P^M)$$

を $L$-構造（$L$-structure）とよぶ．$M$ を $L$-構造 $(M\,;\,c^M, F^M, P^M)$ のユニバース（universe）とよぶが，通常この構造全体を単に $M$ で表わす．$t(x_1, \ldots, x_n)$ が $L$ の項で，$a_1, \ldots, a_n \in M$ のとき，$t^M(a_1, \ldots, a_n)$ は自然な解釈で $M$ の元となる．正確にはこれも帰納的に定義する必要がある．

**問題 8**　値 $t^M(a_1, \ldots, a_n)$ を帰納的に定義せよ．

$L$-構造 $M$ のユニバースが無限のとき，$M$ は無限であるという．また構造 $M$ の濃度とはその構造のユニバースの濃度のことである．

**定義 9（パラメータを持つ論理式の解釈）**　$L$-論理式 $\varphi(x_1, .., x_n)$ と $M$ の元の列 $a_1, \ldots, a_n$ が与えられたとき，$\varphi$ の自由変数 $x_i$ に $a_i \in M$ を代入した論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$[†]が考えられる．このとき $\wedge$ は「かつ」，$\vee$ は「または」，$\rightarrow$ は「ならば」，$\neg$ は「否定」，$\forall$ は「すべて $M$ の元について」そして $\exists$ は「適当な $M$ の元について」と解釈することにより，$L$-構造 $M$ で $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ 成立するか否かが自然に決まる．$\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ が $M$ で成立するとき，記号で $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ とかく．正確には以下のように帰納的に定義する．表現を簡単にするため，$\bar{x}$ は変数記号の列 $x_1, \ldots, x_n$，$\bar{a}$ は $M$ の元の列 $a_1, \ldots, a_n$ を表すものとする：

1．$\varphi$ が $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$（$t(\bar{x})$，$s(\bar{x})$ は $L$ の項）のとき，

$$M \models t(\bar{a}) = s(\bar{a}) \iff t^M(\bar{a}) = s^M(\bar{a})\ ;$$

2．$\varphi$ が $P(t_1(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x}))$（$t_1(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x})$ は $L$ の項，$P$ は $L$ の $m$ 変数述語記号）のとき，

$$M \models P(t_1(\bar{a}), \cdots, t_m(\bar{a})) \iff (t_1{}^M(\bar{a}), \cdots, t_m{}^M(\bar{a})) \in P^M\ ;$$

---

† $a_i$ たちは $L$ の項ではないので，正確に言えば $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ は $L$-論理式ではない．$a_1, \ldots, a_n$ を $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ のパラメータとよぶ．

3．以上が論理記号がない場合である．以下で論理記号の数に関する帰納法で

$\Longleftrightarrow$ の左辺を右辺によって定義してゆく．

$M \models \psi_1(\bar{a}) \wedge \psi_2(\bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \psi_1(\bar{a})$ かつ $M \models \psi_2(\bar{a})$；

$M \models \psi_1(\bar{a}) \vee \psi_2(\bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \psi_1(\bar{a})$ または $M \models \psi_2(\bar{a})$；

$M \models \psi_1(\bar{a}) \rightarrow \psi_2(\bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \psi_1(\bar{a})$ ならば $M \models \psi_2(\bar{a})$；

$M \models \neg \psi(\bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \psi(\bar{a})$ でない；

$M \models \exists x \psi(x, \bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \psi(a, \bar{a})$ となる $a \in M$ が存在；

$M \models \forall x \psi(x, \bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \psi(a, \bar{a})$ がすべての $a \in M$ で成立．

上の定義の1において $M \models t(\bar{a}) = s(\bar{a})$ における等号＝は単なる記号としての等号．また $t^M(\bar{a}) = s^M(\bar{a})$ における等号＝は $M$ の元として本当に等しいという意味の等号である．同じ＝が異なるものを表現しているが，新しい記号を導入すると複雑になり，かえってわかりづらくなるので同じ＝を用いる．

**定義10**　$T$ を言語 $L$ の閉論理式のある集合，$M$ を $L$-構造とする．$T$ のすべての論理式 $\varphi$ が $M$ で成立（$M \models \varphi$）するとき，$M \models T$ とかき，$M$ は $T$ のモデルであるという．

**定義11**　$L$-構造 $M$ で成立する $L$ の閉論理式全体を $\mathrm{Th}(M)$ で表わす．二つの $L$-構造 $M$ と $N$ が $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$ を満たすとき，$M$ と $N$ は基本的に同値（elementarily[†] equivalent）であるといい，$M \equiv N$ で表わす．

**例12**　アーベル群の公理は閉論理式の集合でかくことができる．これを $T_1$ とすれば，$(\mathbb{Z}; 0, +) \models T_1$ である．また代数的閉体の公理も閉論理式の集合で表せる．これを $T_2$ とすれば $(\mathbb{C}; 0, 1, +, \cdot) \models T_2$．

**例13**　これに対して有限群全体を閉論理式の集合で規定することはできない．すなわち，$L = \{e, * \cdot *, *^{-1}\}$ として，どんな $L$-構造 $M$ に対しても，

[†] elementary という言葉は「1階論理式に関して」という意味でモデル論では使われる．その訳として基本的という日本語を採用した．

$$M\text{は有限群} \Longleftrightarrow M\text{は}\ T\ \text{のモデル}$$

となる $L$ の閉論理式の集合 $T$ は存在しない．このことは次の節で述べるコンパクト性定理によりわかる．

**例14**　$\bar{\mathbb{Q}}$ を有理数全体の代数閉包とすれば，$(\mathbb{C}; 0, 1, +, \cdot) \equiv (\bar{\mathbb{Q}}; 0, 1, +, \cdot)$ である．（証明は省略．）

**定義15**　二つの $L$-構造 $M, N$ が同型（isomorphic，記号：$M \simeq N$）であるとは，次の意味で構造を保存する全単射　$\sigma : M \to N$ が存在することである：

1．$\sigma(c^M) = c^N$，ただし $c \in L$ は定数記号；

2．$\sigma(F^M(a_1, \ldots, a_m)) = F^N(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m))$　$({}^\forall a_1, \ldots, a_m \in M)$，ただし $F \in L$ は $n$ 変数関数記号；

3．$P^N = \{(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in N^n : (a_1, \ldots, a_n) \in P^M\}$，ただし $P \in L$ は $n$ 変数述語記号．

$\sigma$ は $M$ から $N$ の上への同型写像（isomorphism）とよばれる．

**定義16**　$M$ と $N$ を $L$-構造とする．写像 $\sigma : A \to B$ $(A \subset M,\ B \subset N)$ が $(M, N)$-基本写像（$(M, N)$-elementary mapping）であるとは，任意の $L$-論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow N \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \quad ({}^\forall a_1, \ldots, a_n \in A)$$

が成立することである．$M, N$ を明示する必要がないときは単に基本写像という．基本写像 $\sigma$ が $D$ の元を固定する $(\sigma(d) = d\ ({}^\forall d \in D))$ とき，$\sigma$ は $D$-基本写像であるという．

**問題17**　1．$(M, N)$-基本写像は単射であることを示せ．

2．$M \simeq N \Rightarrow M \equiv N$ を示せ．（ヒント：意味を考えると当たり前である．詳しくは論理式 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ の中に含まれる論理記号の数による帰納法で，$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow N \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ を示すことになる．したがって，同型写像が基本写像になることもわかる．）

## 1.4　ウルトラ・プロダクト

この節では，$L$-構造の集合が与えられたとき，これらから新しい $L$-構造をウルトラ・プロダクトを使って作る方法を紹介する．新しい構造は与えられた構造たちのある意味で平均的な性質を持つ．またウルトラ・プロダクトを用いてコンパクト性定理を示す．

まず，「与えられた無限集合の大きな部分集合たち」という意味あいを持つ概念を導入する．

**定義18**　$I$ を無限集合として，$U$ を $\mathcal{P}(I)$†のある部分集合とする．$U$ は次の条件を満たすとき，$I$ 上のウルトラ・フィルター（ultra filter）と呼ばれる．

1．任意の $A\subset I$ に対して，$A\in U$ または $I-A\in U$；

2．$U$ は有限交叉性（finite intersection property）を持つ：有限個の $A_1, \ldots, A_n\in U$ に対して，常に $A_1\cap\cdots\cap A_n\neq\emptyset$．

**注意19（ウルトラ・フィルターの性質）**　$U$ が $I$ 上のウルトラ・フィルターのとき，次が成立する．

- $A\in U,\ A\subset B\in\mathcal{P}(I)\ \Rightarrow\ B\in U.$
- $A_1, \ldots, A_n\in U \iff A_1\cap\cdots\cap A_n\in U$；

最初の性質は次のように示される：$B\notin U$ としよう．このとき条件1により $I-B\in U$ でなければならない．したがって有限交叉性により，$A\cap(I-B)\neq\emptyset$．しかし $A\subset B$ だから，これは不可能である．2番目の性質の $\Leftarrow$ は1番目の性質からでる．$\Rightarrow$ については次のようにする．$A_1, \ldots, A_n\in U$ だが $A_1\cap\cdots\cap A_n\notin U$ とすれば，$A_1\cap\cdots\cap A_n\cap(I-A_1\cap\cdots\cap A_n)\neq\emptyset$ を得る．しかしこれは不可能である．

無限集合 $I$ の中の1点 $a$ を固定して，$U_a=\{A\subset I : a\in A\}$ を考える．明らかに $U_a$ は $I$ 上のウルトラ・フィルターになる．このような自明なウルトラ・フィルター以外にもウルトラ・フィルターは存在する．以下でこれを示そう．

---
† $\mathcal{P}(I)=I$ の部分集合全体

**命題20**　$I$ を無限集合とし，$V \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性を持つものとする．このとき，$V$ はウルトラ・フィルターに拡大される．すなわち，$I$ 上のウルトラ・フィルター $U$ で $V$ を含むものが存在する．

**証明**：$\{A_i : i < \kappa\}$ を $\mathcal{P}(I)$ の元を順序数 $\kappa = |\mathcal{P}(I)|$ の順序で１列にならべたものとする．$A_i$ またはその補集合 $I - A_i$ をひとつずつ，$V$ に付加してゆけばよい：$\mathcal{P}(I)$ の部分集合の上昇列 $V = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_\alpha \subset \cdots$ を各 $U_\alpha$ が有限交叉性を保つように順次作って行く．$\alpha$ 未満の $i$ に対する $U_i$ が構成できたとする．

（ｉ）　$\alpha$ が極限順序数のとき．$U_\alpha = \bigcup_{i<\alpha} U_i$ とする．$U_\alpha$ は有限交叉性を持つ．実際，有限個の $A_1, \ldots, A_n \in U_\alpha$ をとるとき，$i < \alpha$ を充分大きく選べば，$A_1, \ldots, A_n \in U_i$ とできる．したがって $U_i$ の有限交叉性から，$A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ を得る．

（ii）　$\alpha = \beta + 1$ のとき．$U_\beta \cup \{A_\beta\}$ または $U_\beta \cup \{I - A_\beta\}$ のいずれかは有限交叉性を持つ．もし両方とも有限交叉性を持たなければ，$X_1, \ldots, X_m \in U_\beta$ と $Y_1, \ldots, Y_n \in U_\beta$ を適当にとることにより，

$$X_1 \cap \cdots \cap X_m \cap A_\beta = \emptyset \quad \text{かつ} \quad Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \cap (I - A_\beta) = \emptyset$$

となる．したがって，

$$X_1 \cap \cdots \cap X_m \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_n = \emptyset$$

を得る．これは $U_\beta$ 自体の有限交叉性に反する．したがって $U_\beta \cup \{A_\beta\}$ または $U_\beta \cup \{I - A_\beta\}$ のいずれかは有限交叉性を持つ．有限交叉性を持つ方を $U_\alpha$ とすればよい．

$U = \bigcup_{i<\kappa} U_i$ がウルトラ・フィルターになることは作り方により明らか．　□

$I$ が無限集合のとき，$V = \{A \subset I : I - A$ は有限$\}$ は明らかに有限交叉性を持つ．したがって上の命題20により，$V$ を含む $I$ 上のウルトラ・フィルター $U$ が存在する．この $U$ は明らかに自明なウルトラ・フィルター $U_a$ $(a \in I)$ とは異なるものである．実際，$\bigcap_{A \in U_a} A = \{a\}$ だが，$\bigcap_{A \in U} A = \emptyset$ になっている．以上をまとめると次のようになる．

**命題21**　$I$ を無限集合とする．$V = \{A \subset I : I - A$ は有限$\}$ を拡大した $I$ 上の自明で

ないウルトラ・フィルターが存在する．

$I$ 上のウルトラ・フィルター $U$ に入っている元を $I$ の大きな部分集合（$I$ の大部分）と考える．$L$-構造 $M_i$（$i \in I$）が与えられたとき，"大部分" の $M_i$ たちが持つ性質を同じく持つ新しい構造 $M^*$ をウルトラ・フィルターを使って構成しよう．その定義のために，記法を準備する：

- $\prod_{i\in I} M_i = M_i$ たちの直積 $= \{f \in {}^I(\bigcup_{i\in I} M_i) : f(i) \in M_i (\forall i \in I)\}$；
- $f, g \in \prod_{i\in I} M_i$ に対して，$f \sim g \Longleftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$ とする．$U$ がウルトラ・フィルターであることから２項関係 $\sim$ は同値関係になることがわかる；
- $[f] = f$ の $\sim$ による同値類；
- $\prod_{i\in I} M_i / U = \{[f] : f \in \prod_{i\in I} M_i\}$.

**定義22**　$I$ を無限集合とし，$U$ を $I$ 上のウルトラ・フィルターとする．$L$-構造たちの集合 $\{M_i : i \in I\}$ に対して，新しい $L$-構造 $M^*$ を次のように定義する：

1．$M^*$ のユニバースは $\prod_{i\in I} M_i / U$；

2．$c$ が $L$ の定数記号のとき，$c^{M^*} = [f]$．ただし，$f(i) = c^{M_i}$；

3．$F$ が $L$ の $m$ 変数関数記号のとき，

$$F^{M^*}([f_1], \cdots, [f_m]) = [g].$$

ただし，$g$ は $g(i) = F^{M_i}(f_1(i), \cdots, f_m(i))$ で定義される関数.

4．$P$ が $L$ の $n$ 変数述語記号のとき，

$$P^{M^*} = \{([f_1], \cdots, [f_n]) : \{i \in I : M_i \models P(f_1(i), \cdots, f_n(i)\} \in U\}.$$

つまり

$$M^* \models P([f_1], \cdots, [f_n]) \Longleftrightarrow \{i \in I : M_i \models P(f_1(i), \cdots, f_n(i))\} \in U;$$

$M^*$ を $\{M_i : i \in I\}$ のウルトラ・プロダクト（ultraproduct）といい，$\prod_{i\in I} M_i / U$ で表わす．特に $M_i$ たちがすべて同じ構造 $M_0$ のときは，$M^*$ を $M_0$ のウルトラ・パワー（ultrapower）とよぶ.

**注意23**　上の定義が well-defined になることは示す必要がある．すなわち，代表元のとり方によらない定義になっていることを示しておかねばならない．例えば，3の関数の定義で対（$[f_1],\cdots,[f_m]$）の $F^M$ による行く先 $F^M([f_1],\cdots,[f_m])$ は $g(i)=F^{M_i}(f_1(i),\cdots,f_m(i))$ なる関数 $g$ を用いて定義されている．したがって同値類 $[f_k]$ のもう一つの代表元 $f_k'$ をとって，$g'(i)=F^{M_i}(f_1'(i),\cdots,f_m'(i))$ と定義したとき，$[g]=[g']$ でなければならない：$A_k\in U$ $(k=1,\ldots,m)$ を

$$f_k(i)=f_k'(i)\ \ (^\forall i\in A_k)$$

となるようにとっておく．このとき，$A=A_1\cap\cdots\cap A_m\in U$．この $A$ に対して，

$$g(i)=g'(i)\ \ (^\forall i\in A).$$

ウルトラ・フィルターの性質により，$\{i\in I : g(i)=g'(i)\}\in U$．これから $[g]=[g']$ を得る．

**定理24（Łos の定理）**　$I$ を無限集合とし，$U$ を $I$ 上のウルトラ・フィルターとする．$M=\prod_{i\in I}M_i/U$ を $L$–構造たちの集合$\{M_i : i\in I\}$のウルトラ・プロダクトとする．このとき，任意の論理式 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ と $[f_1],\cdots,[f_n]\in M$ に対して，

$$M\models\varphi([f_1],\cdots,[f_n])\iff\{i\in I : M_i\models\varphi(f_1(i),\cdots,f_n(i))\}\in U.$$

**証明**：他の場合も同様なので，議論を簡単にするために，言語$L$は述語記号だけからなるものとする．証明は$\varphi$の中にある論理記号の数$m$に関する帰納法によればよい．

（i）　$m=0$ のとき．$\varphi$ は述語記号 $P(x_1,\ldots,x_n)$ 自体なので，定理の主張は定義そのものである．

（ii）　$m=k+1$ のとき．$\varphi(\bar{x})$ は次のいずれかの形をしている：$\psi_1(\bar{x})\wedge\psi_2(\bar{x})$，$\psi_1(\bar{x})\vee\psi_2(\bar{x})$，$\psi_1(\bar{x})\to\psi_2(\bar{x})$，$\neg\psi(\bar{x})$，$\exists x\psi(x,\bar{x})$ または $\forall x\psi(x,\bar{x})$．最初に $\varphi(\bar{x})=\psi_1(\bar{x})\wedge\psi_2(\bar{x})$ の場合を示そう．$\psi_1$，$\psi_2$ のそれぞれの中に含まれる論理記号の数は$<m$ である．簡単のため，$[\bar{f}]=[f_1],\cdots,[f_n]$，$\bar{f}(i)=f_1(i),\cdots,f_n(i)$ の記法を用いる．

$$M \models \psi_1([\bar{f}]) \wedge \psi_2([\bar{f}])$$

$$\iff M \models \psi_1([\bar{f}]) \text{ かつ } M \models \psi_2([\bar{f}])$$

$$\iff \{i \in I : M_i \models \psi_1(\bar{f}(i))\}, \{i \in I : M_i \models \psi_2(\bar{f}(i))\} \in U$$

$$\iff \{i \in I : M_i \models \psi_1(\bar{f}(i))\} \cap \{i \in I : M_i \models \psi_2(\bar{f}(i))\} \in U$$

$$\iff \{i \in I : M_i \models \psi_1(\bar{f}(i)) \text{ かつ } M_i \models \psi_2(\bar{f}(i))\} \in U$$

$$\iff \{i \in I : M_i \models \psi_1(\bar{f}(i)) \wedge \psi_2(\bar{f}(i))\} \in U.$$

次に $\varphi(\bar{x}) = \exists x \psi(x, \bar{x})$ の場合を考えよう．最初に⇒の方向を示す．$M \models \exists x \psi(x, [\bar{f}])$ とする．∃ の解釈の定義から $[g] \in M$ を適当に選ぶと，

$$M \models \psi([g], [\bar{f}]).$$

$\psi$ に対して帰納法の仮定を用いると，

$$\{i \in I : M_i \models \psi(g(i), \bar{f}(i))\} \in U.$$

$\{i \in I : M_i \models \exists x \psi(x, \bar{f}(i))\} \supset \{i \in I : M_i \models \psi(g(i), \bar{f}(i))\}$ だから，ウルトラ・フィルターの性質（注意19）により，

$$\{i \in I : M_i \models \exists x \psi(x, \bar{f}(i))\} \in U.$$

⇐ の方向は上の議論を逆にたどればよい．$A = \{i \in I : M_i \models \exists x \psi(x, \bar{f}(i))\} \in U$ とする．このとき，各 $i \in A$ に対して，$M_i \models \psi(a_i, \bar{f}(i))$ となる元 $a_i \in M_i$ を選ぶ．$g(i) = a_i$ $(i \in A)$ となる $g \in \prod_{i \in I} M_i$ を選べば帰納法の仮定により，$M \models \psi([g], [\bar{f}])$．したがって，$M \models \exists x \psi(x, [\bar{f}])$ である．

他の論理記号の場合は読者の演習問題とする．¬, → の場合は定義18の１番を使うことに注意する．　□

**定理25（コンパクト性定理）**　$T$ を言語 $L$ の閉論理式の集合とする．このとき次は同値である．

1．$T$ はモデルを持つ；

2．$T$ の任意の有限部分はモデルを持つ．

**証明**：1 ⇒ 2 は自明である．2 を仮定して 1 を示す．各有限集合 $F\subset_{\mathrm{fin}}T$ に対して，モデル $M_F\models F$ を一つずつ固定する．$I$ を $T$ の有限部分集合全体として，$A_F=\{E\in I: M_E\models F\}$ とする．$A_F$ たち全体を $V$ とすれば，$V\subset\mathcal{P}(I)$ である．また $A_{F_1}\cap\cdots\cap A_{F_n}$ の中に $F_1\cup\cdots\cup F_n$ が入っているので，$V$ は有限交叉性を持つ．したがって，命題20により，$V$ を拡大した $I$ 上のウルトラ・フィルター $U$ が存在する．ウルトラ・プロダクト $M=\prod_{F\in I}M_F/U$ が求めるものである．実際 $\varphi\in T$ とすれば，$A\varphi\in U$，すなわち $\{E\in I: M_E\models\varphi\}\in U$．Łos の定理（定理24）により，$M\models\varphi$ を得る．

**系26**　$T$ は $L$ の閉論理式の集合で無限モデルを持つものとする．任意の無限基数 $\kappa$ に対して，$T$ のモデルで濃度が $\kappa$ 以上のものが存在する．

**証明**：言語 $L$ に新しい定数記号たち $c_i$ $(i<\kappa)$ を付加して新しい言語 $L^*$ を作る．$L^*$-閉論理式の集合 $T^*$ を

$$T^*=T\cup\{c_i\neq c_j: i<j<\kappa\}$$

とする．すなわち，新しい定数たちはすべて異なるという条件を $T$ に追加したものが $T^*$ である．$T^*$ がモデルを持つことを示すためには，上記のコンパクト性定理（定理25）により，$T^*$ の任意有限部分がモデルを持つことを示せばよい．このためには次の主張を示せば十分である．

**主張**　任意有限個の $i_1<\ldots<i_n<\kappa$ に対して $T\cup\{c_{i_k}\neq c_{i_l}: k<l\leq n\}$はモデルを持つ．

$T$ の無限モデルを $M$ とする．$a_1,\ldots,a_n$ を $n$ 個の異なる $M$ の元として，$c_{i_k}$ の $M$ での解釈を $a_k$ と決める．これにより $M$ は $L\cup\{c_{i_1},\ldots,c_{i_n}\}$-構造となって，しかも $T\cup\{c_{i_k}\neq c_{i_l}: k<l\leq n\}$のモデルとなる．　□

## 1.5　言語と構造に関する基本的な命題

群 $G=(G\,;e,*\cdot*,\ *^{-1})$ の部分群とは単位元 $e$ を含み，二つの関数（演算）$*\cdot*,\ *^{-1}$ によって閉じている部分集合であった．これを模して一般の $L$-構造 $M$ に対して部分構造という概念を定義する．また部分構造の中でも特に重要な基

本部分構造について関連した基本的性質を述べる．Löwenheim-Skolem の定理はその中の一つである．

**定義27** $M$ を $L$-構造とする．空でない部分集合 $N \subset M$ が次の条件を満たすとき，$M$ の部分構造 (substructure) と呼ばれる．

1．定数記号 $c$ の解釈 $c^M$ は $N$ に入っている；

2．関数記号 $F \in L$ の解釈 $F^M$ に対して $N$ は閉じている．($\bar{a} \in N \Rightarrow F^M(\bar{a}) \in N$.)

**例28** 群 $G$ を$\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$-構造と考えるとき，部分群と部分構造は同じ概念になる．

$L$-構造 $M$ の部分構造 $N$ は，$L$ の関数，述語の解釈を $N$ に制限することにより自然に $L$-構造になる．すなわち各記号の $N$ での解釈を次のようにする：

- $c^N = c^M$，ただし $c \in L$ は定数記号；
- $F^N = F^M | N^m$†，ただし $F \in L$ は $m$ 変数関数記号；
- $P^N = P^M \cap N^n$，ただし $P \in L$ は $n$ 変数述語記号．

次に部分構造の中でも特に重要な基本部分構造の概念を定義しよう．

**定義29** $N$ を $L$-構造 $M$ の部分構造とする．任意の $L$-論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と $N$ の元 $a_1, \ldots, a_n$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

が成立するとき，$N$ は $M$ の基本部分構造 (elementary substructure；記号 $N \prec M$) である，あるいは $M$ は $N$ の基本拡大 (elementary extension；記号 $M \succ N$) であると言われる．

$M, N$ を $L$-構造とする．$M$ の部分構造で $N$ と同型なものが存在するとき，$N$ は $M$ に埋め込めるという．また $M$ の基本部分構造で $N$ と同型なものがあるとき，$N$ は $M$ に基本部分構造として埋め込めるという．これは基本写像 $f: N \to M$ の存在と同値である．

---

† 関数 $F^M$ の定義域を $N^m$ に制限してできる関数.

集合 $A$ の元をパラメータとして許す論理式を $L(A)$-論理式とよぶことにする．$M$ の基本部分構造 $N$ は $L(N)$-論理式で表される性質については $M$ と全く同じ性質を持つ部分構造である．また基本部分構造の定義を，任意の $L$-論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と $N$ の元 $a_1, \ldots, a_n$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

$$(\text{あるいは } N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n))$$

が成立することとしても同値な定義が得られることはすぐわかる．

**問題30** $N \prec M,\ N \subset N' \prec M \Rightarrow N \prec N'$ を示せ．

**問題31** $L$-構造 $M$ の一つのウルトラ・パワーを $M^*$ とする．$M$ は $M^*$ の中に基本部分構造として埋め込めることを示せ．（ヒント：$a \in M$ と $[f_a] \in M^*$ を同一視する．ただし $f_a$ は，$f_a(i) = a$ $({}^\forall i)$ なる関数．）

さて部分構造は一言で言えば $L$ の関数で閉じている部分集合であった．次の補題は，基本部分構造はもう少し強い意味でも閉じた部分集合になることを示している．

**補題32（Tarski-Vaught の判定条件）** $M$ を $L$-構造とし，$N \subset M$ とする．このとき次は同値である．

1．$N$ は $M$ の基本部分構造である；

2．任意の $L(N)$-論理式 $\varphi(x)$ に対して

$$M \models \exists x \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad M \models \varphi(a) \text{ となる } a \in N \text{ が存在する．}$$

条件2を Tarski-Vaught の判定条件とよぶ．

**証明**：$1 \Rightarrow 2$．1を仮定して2を示す．いま $M \models \exists x \varphi$ とすれば，$N \prec M$ により，$N \models \exists x \varphi$．したがって $\exists$ の $N$ での解釈により，$N \models \varphi(a)$ となる $a \in N$ が存在する．再び $N \prec M$ により，$M \models \varphi(a)$．

$2 \Rightarrow 1$．$N$ が部分構造になっていることを最初に示す．定数記号 $c \in L$ に対して，$M \models \exists x[c = x]$．条件2により $a \in N$ を選んで，

$$M \vDash c = a$$

とできる．このことは $c^M = a \in N$ を示す．すなわち定数記号の $M$ での解釈はすべて $N$ の中に入っている．同様の議論により，$L$ の関数記号 $F$ の解釈 $F^M$ によって $N$ が閉じていることも示される．すべての $L(N)$-閉論理式に対して，

$$M \vDash \varphi \Longleftrightarrow N \vDash \varphi$$

となることを $\varphi$ の中に含まれる論理記号の数 $m$ に関する帰納法で証明する．$m=0$ のとき，$N$ での言語 $L$ の解釈はすべて $M$ での解釈の制限になっているから，同値性は自明である．$m>0$ のときは，$L(N)$-閉論理式 $\varphi$ が，$\psi_1 \wedge \psi_2$，$\psi_1 \vee \psi_2$，$\psi_1 \rightarrow \psi_2$，$\neg \psi$，$\exists x \psi(x)$ または $\forall x \psi(x)$ の各場合に帰納法の仮定を使って証明してゆけばよい．

小手調べに $\psi_1 \wedge \psi_2$ の場合を考える．

$$\begin{aligned} M \vDash \psi_1 \wedge \psi_2 &\Longleftrightarrow M \vDash \psi_1 \text{ かつ } M \vDash \psi_2 \\ &\Longleftrightarrow N \vDash \psi_1 \text{ かつ } N \vDash \psi_2 \quad \cdots\cdots \quad \text{帰納法の仮定} \\ &\Longleftrightarrow N \vDash \psi_1 \wedge \psi_2 \end{aligned}$$

重要なのは $\varphi = \exists x \psi(x)$ の場合のステップである．

$$\begin{aligned} M \vDash \exists x \psi(x) &\Longleftrightarrow M \vDash \psi(a) \text{ となる } a \in N \text{ が存在} \\ &\Longleftrightarrow N \vDash \psi(a) \text{ となる } a \in N \text{ が存在} \\ &\Longleftrightarrow N \vDash \exists x \psi(x) \end{aligned}$$

上の 1 行目の $\Rightarrow$ において条件 2 を使っている．これら以外の論理記号の場合は読者の演習とする． □

**例33** 実数の構造 $\mathbf{R} = (\mathrm{R}\,;\,0, 1, +, \cdot)$ の部分集合 $\mathbf{Q}$（有理数全体）は部分構造である．しかし $\mathbf{R} \vDash \exists x(x^2 = 2)$ だが $\mathbf{Q} \vDash \neg \exists x(x^2 = 2)$ なので基本部分構造ではない．

**例34** 上の例では $\mathbf{R}$ と $\mathbf{Q}$ はもちろん同型ではない．同型な部分構造であっても基本部分構造にならない場合もある：$L = \{ * < * \}$として，自然数全体 $\mathbf{N}$ を $L$-構造

と思う．$\mathbf{N}'=\mathbf{N}-\{0\}$は $\mathbf{N}$ の部分構造であり，さらに $L$-構造として $\mathbf{N}$ と同型になっている．しかし，$\mathbf{N}'\prec\mathbf{N}$ ではない．実際 $1\in\mathbf{N}'$ をパラメータとして持つ論理式 $\exists x[x<1]$ は $\mathbf{N}$ で成立するが $\mathbf{N}'$ ではもちろん成立しない．

**例35**　$(\mathbf{Z}\,;0,+,-)$ の部分群 $(2\mathbf{Z}\,;0,+,-)$ は $(\mathbf{Z}\,;0,+,-)$ 部分構造だが，基本部分構造ではない：$(\mathbf{Z}\,;0,+,-)\models\exists x[x+x=2]$ だが $(2\mathbf{Z}\,;0,+,-)\models\neg\exists x[x+x=2]$．

Tarski-Vaught の判定条件（補題32）によれば，部分集合が基本部分構造にならないのは必要な元の数が足りないからだと考えることができる．したがって，与えられた部分集合に必要な元を付け足して行けばいつかは基本部分構造になるだろう．さらにこの付け足す元の数はそれほど多くなくてよい．このことを精密に議論すると次の定理を得る．$L(A)$-論理式は $|L|+|A|+\aleph_0$ 個だけあることに注意する．ただし束縛変数だけが違う論理式は同じものとみている．

**定理36（Löwenheim-Skolem の定理）**　$M$ を無限の $L$-構造とする．$A\subset M$ に対して，$M$ の基本部分構造 $N$ で次を満たすものが存在する．

1．$A\subset N$；

2．$|N|\leq|L|+|A|+\aleph_0$.

**証明**：$\kappa=|L|+|A|+\aleph_0$ とおく．$M$ 自体は濃度が $\kappa$ 以上あるとしてよい．

濃度が $\kappa$ 以下の $M$ の部分集合の増加列$\{A_i : i\in\omega\}$を帰納的に作る．$A_0=A$ から始める．$A_n$ までできたとする．$L(A_n)$-論理式は，$L$ の記号と $A_n$ の元の有限列と考えられるから，それら全体の濃度は，

$$(|L|+|A_n|+\aleph_0)^{<\omega}\leq\kappa^{<\omega}\leq\kappa$$

で上から抑えられる．各 $L(A_n)$-論理式 $\varphi(x)$ に対して，もしそれに解があれば（すなわち $M\models\exists x\varphi(x)$ ならば），その解 $a_\varphi\in M$ を一つずつ選んで $A_n$ に付加する：

$$A_{n+1}=A_n\cup\{a_\varphi : \varphi(x)\ \text{は}\ L(A_n)\text{-論理式で}\ M\models\exists x\varphi(x)\}.$$

$A_n$ に付け加える元の数が $\kappa$ 以下だから，$A_{n+1}$ の濃度も $\kappa$ 以下である．

すべての $A_n$（$n\in\omega$）たちができたとき，$N=\bigcup_{n<\omega}A_n$ とする．次を示せば証

明が完了する．

**主張**　$N$ は Tarski-Vaught の判定条件（補題32）を満たす．

$\varphi(x)$ を $M$ の中に解を持つ $L(N)$-論理式とすれば，$N=\bigcup_{n<\omega}A_n$ により，実は適当な $n$ によって $\varphi(x)$ は $L(A_n)$-論理式となっている．従って $\varphi$ の解は（少なくとも一つ）$A_{n+1}$ の中にある．すなわち $\varphi$ の解が $N$ の中に存在する．　□

**系37**　$T$ を $L$-閉論理式の集合で無限モデルを持つものとする．任意の基数 $\kappa\geq|T|$ に対して，濃度が $\kappa$ となる $T$ のモデルが存在する．（ただし $|T|=|L|+\aleph_0$ であり，これは $L$-閉論理式全体の集合の濃度に等しい．）

**証明**：まず濃度が $\kappa$ 以上のモデル $M$ をコンパクト性定理の系（系26）で作る．その基本部分モデルとして目的のモデルを作ることにする．$A\subset M$ を濃度が $\kappa$ の集合とする．上記の Löwenheim-Skolem の定理(定理36)により，濃度が $|L|+|A|+\aleph_0=\kappa$ 以下の基本部分構造 $N\prec M$, $A\subset N$ が存在する．ここで $N$ は $A$ を含んでいるから $\kappa$ 以上の濃度を持つ．したがって $N$ は丁度 $\kappa$ の濃度を持つ．$M$ で成立する $L$-閉論理式はすべて $N$ でも成立するので $N$ は $T$ のモデルである．　□

**命題38（基本拡大列の定理）**　$M_i$ $(i<\alpha)$ を $L$-構造の基本拡大の上昇列とする．すなわちすべての $i<j<\alpha$ に対して，

$$M_i\prec M_j$$

とする．このとき $M^*=\bigcup_{i<\alpha}M_i$ は自然に $L$-構造になり，さらに

$$M_i\prec M^* \quad (^\forall i<\alpha)$$

が成り立つ．

**証明**：$F$ を $L$ の関数記号とするとき，$F^{M_i}$ $(i<\alpha)$ は関数の拡大列になっている．したがって $a\in M_i\subset M^*$ に対して，$F^{M^*}(a)=F^{M_i}(a)$ によって $F$ の $M^*$ における解釈を定めてやる．述語記号 $P$ に対してもまったく同様に $P^{M^*}=\bigcup_{i<\alpha}P^{M_i}$ とする．これによって $M^*=\bigcup_{i<\alpha}M_i$ は $L$-構造になる．ここで $M_i\prec M^*$ を示すために，主張：

$(*)_n$　各 $i<\alpha$ に対して，$L(M_i)$-論理式 $\varphi$ に現れる論理記号の数が $n$ 以下ならば

$$M^* \models \varphi \iff M_i \models \varphi$$

を $n$ に関する帰納法で示すことにする．一番外側の論理記号が $\exists$ の場合を示す：$\varphi = \exists x\psi(x)$ の論理記号の数が $n+1$ とする．$M^* \models \varphi$ のとき，$a \in M^*$ を選ぶと，

$$M^* \models \psi(a)$$

が成立する．$a \in M_j$ となる $j \geq i$ があるから，$\psi(a)$ に帰納法の仮定 $(*)_n$ を使うと，$M_j \models \psi(a)$．したがって，$M_j \models \exists x\psi(x)$．$M_i \prec M_j$ から $M_i \models \exists x\psi(x)$ を得る．逆向きは易しい．他の論理記号の場合は読者の演習とする．　□

# 第2章　各種のモデルの存在定理

言語 $L$ の閉論理式の集合 $T$ が次の二つの条件を満たすとき，本書では理論 (theory, complete theory) とよぶことにする．

1．$T$ は無限モデルを持つ；

2．$T$ は完全である．すなわち任意の $L$-閉論理式 $\varphi$ に対して $\varphi \in T$ あるいは $\neg\varphi \in T$.

本章以降では，何も言わなければ $T$ は上で定義した意味での理論になっているとする．$M, N$ などは $T$ のモデルを表わすために用いる．$M$ が $T$ のモデルのとき，$M$ の基本部分構造 $N$ は必然的に $T$ のモデルになる．この意味で $N$ を $M$ の基本部分モデル (elementary submodel) とよぶことも多い．

**例39**　$M$ を無限の $L$-構造として，$\mathrm{Th}(M)$ を $M$ で成立する $L$-閉論理式全体とすれば，$\mathrm{Th}(M)$ は理論の例になる．

前章の Löwenheim-Skolem の定理の系（系37）から，理論 $T$ のモデルは一つではなく，$|T| = |L| + \aleph_0$ 以上の各基数を濃度に持つモデルが存在する．また，たとえ濃度を固定しても，同型にはならないモデルが一般にはある．

**例40**　$T = \mathrm{Th}(\mathbb{N} - \{0\}\ ;\ +)$ に対して，$T' = T \cup \{\overbrace{c + \cdots + c}^{m} \neq \overbrace{d + \cdots + d}^{n} : m, n \in \omega - \{0\}\}$（ただし $c, d$ は新しい定数記号）はコンパクト性定理（定理25）と Löwenheim-Skolem の定理（定理36）により，可算モデル $M$ を持つ．もちろん $M$ は $T$ のモデルだが，$M \not\cong (\mathbb{N} - \{0\}, +)$ である．

## 2.1　$\kappa$-飽和モデル

**定義41**　$M$ を $L$-構造とし，$A \subset M$ とする．

1．$p(\bar{x})$ を $\bar{x}$ を自由変数として持つ $L(A)$-論理式の集合とする．$p(\bar{x})$ が $M$ に

おける $A$ 上のタイプ（type, complete type）であるとは，次の 2 条件を満たすことである：

- 有限充足性：任意有限個の $\varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_n(\bar{x}) \in p$ は $M$ の中に共通解を持つ（$M \vDash \exists \bar{x}[\varphi_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\bar{x})]$）．
- 完全性：任意の $L(A)$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ について，$\varphi(\bar{x}) \in p$ または $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$ である．

$A$ を $p$ の定義域とよび，$\mathrm{dom}(p)$ で表わす．$M$ や $A$ が明らかなとき，あるいは言及する必要がないときは，$p$ を単にタイプとよぶ．$\bar{x}$ の長さ $\mathrm{lh}(\bar{x})$ が $n$ のとき，$p(\bar{x})$ を $n$ 変数タイプとよぶ．タイプは $p, q, r$ などで表わす．

2．$\bar{a} \in M$ に対して，

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \{\varphi(\bar{x}) : \varphi(\bar{x}) \text{ は } M \vDash \varphi(\bar{a}) \text{ となる } L(A)\text{-論理式}\}.$$

$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ を $\bar{a}$ の $A$ 上のタイプとよぶ．$A = \emptyset$ のときは $A$ を省略して単に $\mathrm{tp}(\bar{a})$ とかく．

3．$n \in \omega$ に対して，$A$ 上の $n$ 変数タイプ全体の集合を $\mathrm{S}_n(A)$ とかく．また $\mathrm{S}(A) = \bigcup_{n<\omega} \mathrm{S}_n(A)$ とする．

4．$\bar{a} \in M$ がタイプ $p(\bar{x})$ に属するすべての論理式 $\varphi(\bar{x})$ の解（すなわち $M \vDash \varphi(\bar{a})$）になっているとき，$\bar{a}$ は $p(\bar{x})$ の解であるという．

5．無限列 $\{a_i : i < \alpha\}$ に対しては $\mathrm{tp}(\{a_i : i < \alpha\}/A)$ を，

$$\{\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) : \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \ (i_1, \ldots, i_n < \alpha) \text{ は } M \vDash \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \text{ となる } L(A)\text{-論理式}\}$$

で定義する．これは無限個の自由変数を持つので，本来の意味（1）でのタイプではないが，これもタイプとよぶことがある．

タイプ $p(\bar{x})$ は $\bar{x}$ に関する（無限個の）条件の集合である．$M \supset \mathrm{dom}(p)$ としても，$p$ の解が $M$ の中にあるとは限らない．

**問題42**　$\Sigma(\bar{x})$ を $\bar{x}$ を自由変数として持つ $L(A)$-論理式の集合とする．$\Sigma(\bar{x})$ が

$M \supset A$ で有限充足的ならば，$A$ 上のタイプに拡大される．これを示せ．（ヒント：$\bar{x}$ を自由変数として持つ $L(A)$-論理式を1列に並べて，そのまま，あるいはその否定を $\sum(\bar{x})$ に順に付加してゆく．有限交叉性を持つ集合がウルトラ・フィルターに拡大されることを示すときと同様の議論を展開せよ.）

**問題43**　自由変数 $\bar{x}$ を持つ $A$ 上のタイプ $p(\bar{x})$ の個数は高々 $2^{|L|+|A|+\aleph_0}$ である．これを示せ.（ヒント：タイプ $p(\bar{x})$ は $L(A)$-論理式の集合の部分集合である.）

**定義44**　$\kappa$ を無限基数とする．$L$-構造 $M$ が $\kappa$-飽和（$\kappa$-saturated）であるとは，

1．$\mathrm{dom}(p) \subset M$,

2．$|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$

を満たす任意のタイプ $p(\bar{x})$ が $M$ で解を持つことである．

**注意45**　上の $\kappa$-飽和の定義で，タイプ $p$ を1変数の場合に限っても同値な定義を得る：実際 $M$ を1変数タイプの意味で $\kappa$-飽和としよう．$q(x, y)$ を $\mathrm{dom}(q) \subset M$, $|\mathrm{dom}(q)| < \kappa$ なる2変数タイプとする．$q^*(y) = \{\exists x \varphi(x, y) : \varphi(x, y) \in q(x, y)\}$ は1変数タイプに拡大可能なので，$M$ で解 $b$ を持つ．このとき，$q(x, b) = \{\varphi(x, b) : \varphi(x, y) \in q(x, y)\}$ は $\mathrm{dom}(q) \cup \{b\}$ 上の1変数タイプとなり，$\kappa$ が無限なことから，$\mathrm{dom}(q(x, b)) \subset M$, $|\mathrm{dom}(q(x, b))| < \kappa$ となる．したがって，これは解 $a \in M$ を持つ．すなわち列 $a, b$ は $q(x, y)$ の $M$ での解になっている．

**注意46**　$X = \{x_i : i < \kappa\}$ を変数記号の集合として，自由変数が $X$ に含まれる $L$-論理式の集合 $\sum(X)$ を考えよう．もし $\kappa$-飽和なモデル $M$ で $\sum(X)$ が有限充足的ならば $\sum(X)$ は $M$ に解を持つ．これは上と同様の議論によって示すことができる．

$M$ におけるタイプ $p(x)$ は $x$ に関する“条件”の集まりである．その条件のうち有限個を持ってくれば，それらを同時に満たす元を $M$ から捜すことができるわけだが，$p$ 全体を同時に満たす元が $M$ にあるかどうかはわからない．

**例47**　言語を $L = \{* < *\}$ とするとき，有理数全体 $\mathbf{Q}$ は実数全体 $\mathbf{R}$ の基本部分構造になっている．$L(\mathbf{Q})$-論理式の集合 $\sum(x) = \{a < x < b : a, b \in \mathbf{Q}^+, a^2 < 2 < b^2\}$ は $\mathbf{Q}$ で有限充足的な集合であるが，$\mathbf{Q}$ に解はない．しかし $\mathbf{R}$ では $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ が解になっ

ている．

与えられた$L$-構造$M$と$p \in S(A)$，$A \subset M$に対して，$p$の解を少なくとも一つ持つようなモデル$M' \succ M$を作ることは比較的易しい：$M$の各元$a$に対して新しい定数記号$c_a$を用意して，$L^* = L \cup \{c_a : a \in M\}$の閉論理式の集合：

$$T^* = \{\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) : \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ は } L\text{-論理式で } M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

を考える．このとき$M$自体は$c_a$を$a$に解釈することにより自明に$T^*$のモデルになる．また任意の$T^*$のモデル$M^*$に対して，$a \in M$と$c_a^{M^*}$を同一視することにより，$M$を$M^*$の部分構造と思える．さらに$T^*$の定義から，$M \prec M^*$になっていることもわかる．$T^*$を$M$の基本設計図 (elementary diagram) とよぶ．さて$T^*$を拡大しよう：

$$T' = T^* \cup \{\varphi(c) : \varphi(x) \in p(x)\}.$$

ここで$c$は$L^*$にない新しい定数記号である．$p(x)$が$M$で有限充足的なことから，$T'$の任意有限部分はモデルを持つ．従って，コンパクト性により$T'$全体もモデルを持つ．このモデルを$M'$とすれば，$M' \succ M$で，$c^{M'}$が$p$の解になっている．

上の議論を1ステップとして，同様の拡大を繰り返し行うと，モデルの濃度さえ気にしなければ，与えられた$\kappa$と$M$に対して$\kappa$-飽和な$M$の基本拡大$M^*$を作ることが可能である．$M^*$の濃度を制限しようとすると多少の議論が必要になる．

**定理48**　$\kappa$を$\kappa \geq |T|$なる無限基数とする．$T$には濃度$2^\kappa$の$\kappa^+$-飽和モデルが存在する．

**証明**：Löwenheim-Skolemの定理の証明と同様に必要なタイプの解を順次付け加えてゆき，長さ$\kappa^+$の基本拡大列を作ることにする．$M_0$を$T$の濃度$2^\kappa$の任意のモデルとする．$T$のモデルの列$\{M_i : i < \kappa^+\}$を次の条件が成り立つように作ってゆく：

- $M_i \prec M_j$　$(i < j < \kappa^+)$　；
- $\mathrm{dom}(p(x)) \subset M_i$，$|\mathrm{dom}(p(x))| \leq \kappa$なるタイプ$p(x)$は$M_{i+1}$に解を持つ．

$\alpha$ 未満の $i$ に対する $M_i$ が構成されているとき，$\alpha$ が極限順序数のときは $M_\alpha = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ とする．$\alpha=\beta+1$ のとき．$T^*$ を $M_\beta$ の基本設計図として，

$$T' = T^* \cup \bigcup_{A\subset M_\beta;\ |A|\leq\kappa} \ \bigcup_{p\in \mathrm{S}(A)} \{\varphi(c_p) : \varphi(x)\in p(x)\}$$

とする．ただし $c_p$ は各タイプ $p$ ごとに用意された新しい定数記号である．$T'$ のモデルを $N$ とすれば，$N \succ M_\beta$ である．また $N$ では $c_p^N$ が $p$ の解になっている．$N$ の濃度はどのくらいか分からないが，Löwenheim-Skolem の定理を用いると，

1．$M_\beta \subset M_\alpha \prec N$；

2．$M_\alpha$ は $c_p^N$ たちをすべて含む；

3．$|M_\alpha| = |M_\beta| + |\{c_p^N$ たちの集合$\}|$

を満たす $M_\alpha$ をとることができる．条件 1 と $M_\beta \prec N$ により，問題30を使うと，

$$M_\beta \prec M_\alpha$$

が成立することがわかる．条件 2 により，$M_\alpha$ は $p$ たちの解を少なくとも一つずつは有する．また $c_p^N$ たち全体の個数は $p$ たちの個数で抑えられる．さらに $p$ たちの個数は，$A$ の選び方 $(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ に $\mathrm{S}(A)$ の大きさをかけたもので抑えられる．$\mathrm{S}(A)$ の大きさは $2^{|T|+|A|} = 2^\kappa$ で抑えられるから，

$$「p \text{ たちの個数」} \leq 2^\kappa$$

したがって $M_\alpha$ の濃度は $2^\kappa$ となる．以上で $M_i$ $(i<\kappa^+)$ が作られたわけである．$M^* = \bigcup_{i<\kappa^+} M_i$ が最終的に求めるモデルである．$|M^*| = \kappa^+ + 2^\kappa = 2^\kappa$ はよい．次を示せば証明が終わる：

**主張**　$M^*$ は $\kappa^+$-飽和である．

$A \subset M^*$ を濃度が $\kappa$ 以下の集合とする．$\kappa^+$ が正則基数なことから，$A \subset M_i$ となる $i<\kappa^+$ が存在する．したがって $\mathrm{S}(A)$ に属するすべてのタイプは $M_{i+1}$ ですでに解を持っている．基本拡大列の定理（命題38）により $M_{i+1} \prec M^*$ だから，その解は $M^*$ においても解である．　□

$\varkappa$-飽和なモデルは次の意味で大きなモデルと言える．

**定理49**　$M$ を $T$ の $\varkappa$-飽和なモデルとする．このとき，濃度が $\varkappa$ 以下の $T$ のモデル $N$ は $M$ に基本部分モデルとして埋め込める．

**証明**：$N$ の元を$\{a_i : i<\varkappa\}$というように一列にならべておき，$M$ の飽和性を用いて $a_i$ たちを順次 $M$ の中に埋め込んで行けばよい：$\{b_i : i<\varkappa\}\subset M$ を，

$$\mathrm{tp}(\{a_i : i<\varkappa\}) = \mathrm{tp}(\{b_i : i<\varkappa\})$$

を満足するように帰納的に作ってゆくことができれば定理が証明できたことになる．ここで左辺のタイプは $N$ においてのタイプで，右辺のタイプは $M$ におけるタイプということに注意する．（写像 $a_i \mapsto b_i$ は $(N, M)$-基本写像である．）$\alpha$ $(<\varkappa)$ 未満の $i$ に対する $b_i$ が $\mathrm{tp}(\{a_i : i<\alpha\}) = \mathrm{tp}(\{b_i : i<\alpha\})$ を満足するように作られたとする．$b_\alpha$ を決めなければならない．$p(x) = \mathrm{tp}(a_\alpha/\{a_i : i<\alpha\})$ に対して $p(x)$ に現れるパラメーター $a_i$ たちをすべて $b_i$ で置き換えてできる $L(\{b_i : i<\alpha\})$-論理式の集合 $q(x)$ を考える．帰納法の仮定から，$q(x)$ は $M$ でのタイプになっている．さらに$|\mathrm{dom}(q)| = |\alpha| < \varkappa$ だから，$q(x)$ の解 $b_\alpha$ が $M$ に存在する．このとき，$\mathrm{tp}(\{a_i : i\leq\alpha\}) = \mathrm{tp}(\{b_i : i\leq\alpha\})$ が成立する．

以上で$\{b_i : i<\varkappa\}$が作られたことになる．$N' = \{b_i : i<\varkappa\}$が求める $N$ と同型なモデルになっている．同型に関しては明らかである．また，

$$M \models \varphi(\bar{b}) \Longleftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}) \quad (\because\ \mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})\ \text{による})$$
$$\Longleftrightarrow N' \models \varphi(\bar{b}) \quad (\because\ N \simeq N'\ \text{による}).$$

により $N' \prec M$ を得る．　□

**定義50**　$M$ が$|M|$-飽和のとき，単に $M$ は飽和であるという．$M \models T$ が飽和なとき，$M$ は $T$ の飽和モデル（saturated model）という．

**問題51**　濃度が等しい二つの飽和モデル $M \equiv N$ は同型になることを示せ．（ヒント：$M = \{a_i : i<\varkappa\}$，$N = \{b_i : i<\varkappa\}$のようにモデルの元を一列に並べておき，交互に

相手のモデルの中に元を埋めこむ．すなわち $(M, N)$-基本写像 $\sigma_i : D_i \to E_i$ を，

- $\{a_j : j < i\} \subset D_i \subset M$；
- $\{b_j : j < i\} \subset E_i \subset M$；

となるように帰納的に作ってゆく．往復論法.）

**命題52**　GCH（一般連続体仮説，$2^\lambda = \lambda^+$）を仮定する．任意の正則基数 $\kappa > |T|$ に対して，濃度 $\kappa$ の $T$ の飽和モデルが存在する．

**証明**：$\kappa = \lambda^+$ のときは，定理48そのままである．$\kappa$ が極限基数（すなわち $\kappa = \aleph_\kappa$）のときは，各基数 $\lambda < \kappa$ に対して，濃度 $\lambda^+$ の飽和モデル $M_\lambda$ が存在する．ここで定理49によれば

$$M_\lambda \prec M_{\lambda'} \quad (\lambda < \lambda' < \kappa)$$

を仮定できる．（もちろん直接に基本拡大列を作ることも易しい.）このとき，$M = \bigcup_{\lambda < \kappa} M_\lambda$ が求めるものである．実際，$A \subset M$ を濃度が $\kappa$ 未満の集合とすれば，$\kappa$ の正則性により，$A \subset M_\lambda$ となる $\lambda$ がある．したがって $A$ 上のタイプはすでに $M_{\lambda^+}$ に解を持っていることになる．　□

正則でない基数ではたとえ GCH を仮定しても飽和モデルは一般には存在が示されない．たとえば，$T = \mathrm{Th}(\mathbb{Q} ; <)$ の濃度 $\aleph_\omega$ のモデルは飽和にならない：$\mathcal{M} = (M ; <)$ を濃度 $\aleph_\omega$ の飽和モデルとする．各 $\eta \in {}^{\aleph_\omega >}\mathbf{Z}$ に対して，$a_\eta \in M$ を

$$\mathcal{M} \models a_\eta < a_{\eta'} \Longleftrightarrow \text{辞書式順序で}\ \eta < \eta'$$

となるようにとる．（このような $a_\eta$ たちが $M$ の中にとれることは，注意46を参照のこと.）このとき各 $\nu \in {}^{\aleph_\omega}\mathbf{Z}$ に対して，

$$A_\nu = \{a_{\nu_{n+}} : n < \omega\} \cup \{a_{\nu_{n-}} : n < \omega\}$$

とおく．ただし，$\nu_{n+}$ は列 $\nu$ を長さ $\aleph_n$ までに制限した列の最後に $\nu(\aleph_n) + 1$ を付け加えた長さ $\aleph_n + 1$ の列，$\nu_{n-}$ は同様の制限に $\nu(\aleph_n) - 1$ を付け加えた長さ $\aleph_n + 1$ の列とする．$p_\nu(x) \in S(A_\nu)$ を次の論理式の集合（のタイプへの拡大）とする：

$$\{a_{\nu_{n-}} < x : n < \omega\} \cup \{x < a_{\nu_{n+}} : n < \omega\}$$

$p_\nu$ たちはすべて異なる（共通解のない）タイプである．また $|\mathrm{dom}(p_\nu)| = |A_\nu| = \aleph_0$ だから，$M$ に解を持たなければならない．このことは $|M| \geq |\mathbf{Z}^{\aleph_\omega}| > \aleph_\omega$ を意味する．これは矛盾である．　□

**問題53**　$M$ を $\kappa$-飽和とする．$A$ と $A'$ を濃度が $\kappa$ 未満の $M$ の部分集合として，$\mathrm{tp}(A) = \mathrm{tp}(A')$ が成立していると仮定する．いま濃度が $\kappa$ 未満の勝手な集合 $B \subset M$ に対して，

$$\mathrm{tp}(A \cup B) = \mathrm{tp}(A' \cup B')$$

となる $B' \subset M$ が存在することを示せ．（ヒント：この問題は，$\mathrm{dom}(\sigma) = A \cup B$, $\sigma(A) = A'$ となる $(M, M)$-基本写像の存在を示すことと同値である．$B$ を一列に並べておき，$\sigma$ による行き先を順に決めてやればよい．このとき行き先が実際にあることが飽和性により保証されている.）

## 2.2　タイプを排除するモデル

前節最後の定理49を念頭においた上で，本書では以下の約束に従う．これはあくまでも表現を簡潔にするだけのものである．

**【約束】**　$\kappa^*$ を通常の議論では現れないくらいに非常に大きな無限基数として，$\mathcal{M}$ を理論 $T$ の $\kappa^*$-飽和なモデルとする．このとき，通常の大きさの $T$ のモデルはすべて $\mathcal{M}$ に基本部分モデルとして埋め込める．したがって，以下において単にモデルと言えば，$\mathcal{M}$ の基本部分モデルのこととする．（パラメータを持つ）論理式の集合がモデル $M$ で解を持つとき，$M$ で充足的であるという．$\mathcal{M}$ で充足的なときは単に充足的であるという．

さて，多くのタイプが実現される（すなわち解が存在する）モデルが飽和モデルであった．次になるべくタイプが実現されないようなモデルを作ることを考える．しかし残念ながら，どんなモデルでも必ず実現されてしまうようなタイプもある．

そのことから説明しよう．

**定義54**　$A\subset\mathcal{M}$ とする．$L(A)$-論理式の集合 $\sum(\bar{x})$ が $A$ 上孤立的 (isolated over $A$) であるとは，$\mathcal{M}$ で充足的な $L(A)$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ が存在して，

$$\mathcal{M}\models\forall\bar{x}[\varphi(\bar{x})\ \rightarrow\psi(\bar{x})]$$

がすべての $\psi(\bar{x})\in\sum(\bar{x})$ に対して成立することである．このとき $\varphi(\bar{x})$ は $\sum(\bar{x})$ を生成しているという．

タイプ $p(\bar{x})\in S(A)$ が $A$ 上孤立的なとき，単に孤立的である，あるいは孤立タイプ (isolated type, principal type) であるという．

**注意55**　上の定義で $\sum$ を生成する論理式は必ずしも $\sum$ に入っていなくてもよい．有限個の $L(A)$-論理式の集まり $F$ は充足的である限り，$A$ 上孤立的である．この場合は$\bigwedge F$ が $F$ を生成している．一般には$\bigwedge F$ は $F$ の中には入っていない．しかしタイプ $p$ の場合は（完全性から）生成する論理式が $p$ の中からとれる．

**命題56**　孤立タイプ $p(\bar{x})\in S(A)$ は $A$ を含むどんなモデルにも解が存在する．

**証明**：$M\supset A$ をモデルとする．$\varphi(\bar{x})\in p(\bar{x})$ を $p(\bar{x})$ を生成している $L(A)$-論理式とする．$p$ は $\mathcal{M}$ でのタイプだから，$\mathcal{M}$ で有限充足的．$M\prec\mathcal{M}$ だから，$p$ は $M$ でも有限充足的．したがって $\varphi(\bar{x})$ の解 $\bar{a}$ が $M$ に存在する．ところが $\varphi(\bar{x})$ は $p(\bar{x})$ 全体を生成しているから，$\bar{a}$ は $p(\bar{x})$ 全体の解になっている．　□

では孤立的でないタイプの解は排除することができるだろうか．すなわち孤立的でないタイプの解を持たないようなモデルを作ることができるだろうか？　次の意味において，答は Yes である．

**定理57（タイプの排除定理）**　$T$ を可算言語 $L$ による理論とする．$\{p_i(\bar{x}_i) : i<\omega\}$を可算集合 $A\subset\mathcal{M}$ 上の孤立的でないタイプたちとする．このときすべての $p_i(\bar{x}_i)$ $(i<\omega)$を排除するモデル $M$が存在する．すなわち $M$にはいずれの $p_i(\bar{x}_i)$の解も存在しない．

まず $M$ を構成する上での一つのステップに対応する補題を示す：

**補題58**　$T$ を可算言語 $L$ による理論とする．論理式の集合たち $\sum_i(\bar{x}_i)$ $(i<\omega)$ が

すべて，可算集合 $B\subset\mathcal{M}$ 上孤立的でないとする．$\varphi(\bar{y})$ を充足的な $L(B)$-論理式とするとき，$\varphi(\bar{y})$ の解 $\bar{b}\in\mathcal{M}$ を上手にとれば，すべての $\sum_i(\bar{x}_i)$ が $B\cup\bar{b}$ 上でも孤立的にならないようにできる[†]．

**補題の証明**：$\sum_k(\bar{x}_k)=\sum(\bar{x})$ （${}^\forall k<\omega$）の場合を扱う．一般の場合は少しだけ議論が必要であるが，本質は変わらないので読者の演習問題とする．$L$ と $B$ がともに可算なので，$L(B)$-論理式の数も可算個である．$\theta_i(\bar{x},\bar{y})$ （$i<\omega$）を $\bar{x}$，$\bar{y}$ を自由変数に持つ $L(B)$-論理式を１列に並べたものとする．充足的な $L(B)$-論理式 $\varphi_i(\bar{y})$ （$i=-1,0,1,\cdots$）と $\sigma_i(\bar{x})\in\sum(\bar{x})$ （$i\in\omega$）を

1．$\mathcal{M}\models\forall\bar{y}[\varphi_i(\bar{y})\to\varphi(\bar{y})]\wedge\forall\bar{y}[\varphi_i(\bar{y})\to\varphi_j(\bar{y})]$　　（$i>j$）；

2．$\mathcal{M}\models\forall\bar{y}[\varphi_i(\bar{y})\wedge\exists\bar{x}\,\theta_i(\bar{x},\bar{y})\to\exists\bar{x}[\theta_i(\bar{x},\bar{y})\wedge\neg\sigma_i(\bar{x})]]$

となるように順次定義してゆく．最初に $\varphi_{-1}=\varphi$ とする．$m$ 番目のステップは以下のとおりである．

$$\exists\bar{y}[\varphi_{m-1}(\bar{y})\wedge\theta_m(\bar{x},\bar{y})]$$

が解 $\bar{x}$ を持たなければ，$\varphi_m=\varphi_{m-1}$ とする．解を持てば，$\sum$ が $B$ 上孤立的でないことから，この $L(B)$-論理式によって $\sum(\bar{x})$ 全体が生成されることはない．したがって $\sigma_m(\bar{x})\in\sum$ を適当にとれば，

$$\mathcal{M}\models\exists\bar{x}\,\exists\bar{y}[\varphi_{m-1}(\bar{y})\wedge\theta_m(\bar{x},\bar{y})\wedge\neg\sigma_m(\bar{x})].$$

このとき，$\varphi_m(\bar{y})=\exists\bar{x}[\varphi_{m-1}(\bar{y})\wedge\theta_m(\bar{x},\bar{y})\wedge\neg\sigma_m(\bar{x})]$ とする．

いま $\bar{b}\in\mathcal{M}$ を$\{\varphi_i(\bar{y}):i<\omega\}$の共通解とする．（$\{\varphi_i(\bar{y}):i<\omega\}$が有限充足的で，$\mathcal{M}$ が十分に大きいから $\bar{b}$ をとることができる．）条件１により，$\bar{b}$ は $\varphi$ の解である．また条件２により，どんな $\theta(\bar{x},\bar{b})$ によっても $\sum(\bar{x})$ 全体を生成することはできない．　□

**定理57の証明**：充足的な $L(A)$-論理式の解を $A$ に付け加えてゆく．Tarski-

[†] $\bar{b}=b_1,\ldots,b_n$ とするとき $B\cup\bar{b}$ は $B\cup\{b_1,\ldots,b_n\}$ の省略形である．表現を簡潔にするため列 $\bar{b}$ と集合 $\{b_1,\ldots,b_n\}$ の同一視は以下たびたび行われる．

Vaught の判定条件により，必要な元を順次付け加えてゆけば，いつかはモデル $M$ になる[†]．解を付け加えるときに，上の補題を用いて，$p_i(\bar{x})$ たちが，その元を付け加えた集合上でも孤立的にならないようにしておけば $M$ が目的のモデルとなる．

**主張**　$M$ には $p_i(\bar{x}_i)$ たちの解はない．

$\bar{a}_i \in M$ を $p_i$ の解とすれば，$p_i$ は $L(M)$-論理式 $\bar{x}_i = \bar{a}_i$[‡] によって生成されてしまう．これは $M$ の構成法（$p_i$ が $M$ 上孤立的にならないように作ったこと）に矛盾する．　□

**注意59**　上記の議論で言語が可算なことは本質的である：

$$L = \{F(*), A(*), B(*), P(*, *, *),\ a_i\ (i < \aleph_1), b_i\ (i < \aleph_0)\}$$

とする．ただし $F$，$A$，$B$，$P$ は述語記号，$a_i$，$b_i$ は定数記号である．$L$-構造

$$M = (F^M \sqcup A^M \sqcup B^M ; F^M, A^M, B^M, P^M, a_i^M\ (i < \aleph_1), b_i^M\ (i < \aleph_0))$$

を次のように定義する：$A^M$ と $B^M$ は無限集合，$F^M$ は $A^M$ から $B^M$ への全単射全体の集合とする．$P^M \subset F^M \times A^M \times B^M$ は，

$$M \models P(f, a, b) \Longleftrightarrow f(a) = b$$

で定義されている．$a_i^M$ $(i < \aleph_1)$ は $A$ の相異なる元たちで，$b_i^M$ $(i < \aleph_0)$ は $B$ の相異なる元たちとする．濃度の違いから，論理式の集合 $\Sigma(x) = \{B(x)\} \cup \{x \neq b_i : i < \aleph_0\}$は $N \equiv M$ なるどんなモデルでも解を持つ．しかしそれは孤立的ではない．

---

[†] Löwenheim-Skolem の定理の証明方法参照のこと．

[‡] 列として等しいことを表わす論理式．

# II　安定性と基本的定理

# 第3章　安定性—基本的性質

安定な理論の考察を始める．安定な理論のモデルには独立の概念が定義される．この独立概念を使って構造の解析をするのが遠い目標である．

もう一度我々の設定を復習しておく．$\kappa^*$ を通常考えないような非常に大きな基数として，$\mathcal{M}$ を $\kappa^*$-飽和な $T$ のモデルとして一つ固定する．したがって，定義域が通常の大きさのタイプはすべて $\mathcal{M}$ に解を持つ．また第2章の定理49から，通常の大きさの $T$ のモデルはすべて $\mathcal{M}$ の基本部分モデルとして埋め込める．以下で単にモデルといえば，$\mathcal{M}$ の基本部分モデルのこととする．$M$, $N$ などの記号はこれら $\mathcal{M}$ の基本部分モデルを表わすのに用いる．$A, B, \cdots$ などの記号はおもに $\mathcal{M}$ の部分集合を表わす．$\bar{a}, \bar{b}, \cdots$ などの記号は $\mathcal{M}$ の元の有限列を表わす．$\bar{a}=a_1, \ldots, a_n$ のとき，$a_1 \in A, \cdots, a_n \in A$ を表わすのに略記 $\bar{a} \in A$ を用いる．さらに以下の章を通じて特に断わらない限り，

$T$ は可算言語 $L$ による理論

としておく．

表現を簡潔にするために，$\varphi$ が $L$-論理式であることを $\varphi \in L$，$L(A)$-論理式であることを $\varphi \in L(A)$ で表わすことにする．また単に論理式と言えば $L(\mathcal{M})$-論理式のこととし，タイプと言えば $\mathcal{M}$ におけるタイプのこととする．

**定義60**　$\kappa$ は無限基数とする．

1．$T$ が $\kappa$-安定（$\kappa$-stable）あるいは，$\kappa$ で安定（stable in $\kappa$）であるとは，$\mathcal{M}$ の勝手な部分集合 $A$ に対して次が成立することである：

$$|A| \leq \kappa \Rightarrow |S(A)| \leq \kappa.$$

2．$T$ が安定（stable）であるとは，$T$ が $\kappa$-安定となる $\kappa$ が存在することである．

3．$T$ が超安定 (superstable) であるとは，ある基数以上のすべての基数で安定になることである．

4．構造 $M$ が ($\kappa$-) 安定であるとは $M$ の理論 $\mathrm{Th}(M)$ が ($\kappa$-) 安定になることである．

タイプの個数を数えるとき，自由変数が異なるだけのタイプは同じものとみている．例えば，$p(\bar{x})$ と $p(\bar{y})=\{\varphi(\bar{y}):\varphi(\bar{x})\in p(\bar{x})\}$は同じものとみている．

**注意61**　$\kappa$-安定の概念の定義で $S(A)$ の代わりに $S_1(A)=\{A$ 上の1変数タイプ全体$\}$を用いても同値な定義が得られる：いま$|A|=\kappa$, $|S(A)|>\kappa$ とする．$S(A)=\bigcup_{i<\omega}S_i(A)$ だから，いずれかの $i$ に対して，$|S_i(A)|>\kappa$ である．$i=1$ ならば，目的を達成する．そうでなければ，$|S_i(A)|>\kappa$, $|S_{i-1}(A)|=\kappa$ となる $i$ が存在する．各 $p(x_1,\ldots,x_i)\in S_i(A)$ に対して，$p^*(x_1,\ldots,x_{i-1})=\{\exists x_i\varphi(x_1,\ldots,x_i):\varphi(x_1,\ldots,x_i)\in p\}$は $i-1$ 変数のタイプになる．従って濃度の計算から，濃度が $\kappa$ より大きい $\Gamma\subset S_i(A)$ と $q(x_1,\ldots,x_{i-1})\in S_{i-1}(A)$ で

$$p^*=q(x_1,\ldots,x_{i-1})\quad({}^{\forall}p\in\Gamma)$$

となるものが存在する．$q$ の解 $a_1,\ldots,a_{i-1}$ を一つ固定して，各 $p\in\Gamma$ に対して，$p(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i)$ を作れば，これらは $A\cup\{a_1,\ldots,a_{i-1}\}$上の異なるタイプである．このことは，

$$|S_1(A\cup\{a_1,\ldots,a_{i-1}\})|=|\Gamma|>\kappa$$

を示す．すなわち1変数の意味でも $T$ は $\kappa$-安定でなくなる．

## 3.1　$\aleph_0$-安定性

代数的閉体，またその上の代数群などは $\aleph_0$-安定な構造の例になっている．$\aleph_0$-安定な構造は多くのよい性質を持つ．たとえば素モデル（以下で定義），飽和モデルなどの存在がいえる．

次の定理は $\aleph_0$-安定性が最も強い安定性になっていることを示す．

**定理62**　$T$ が $\aleph_0$-安定ならば $T$ はすべての無限基数 $\kappa$ で安定である．

**証明**：対偶を示す．ある基数 $\kappa$ で安定でないとすれば，

$$|A|=\kappa,\quad |S_1(A)|>\kappa$$

となる $A$ が存在する．数字 0 と 1 の有限列 $\eta\in\omega^{>}2$ に対して論理式 $\varphi_\eta(x)\in L(A)$ を

1．$\mathcal{M}\models\forall x[\varphi_{\eta'}(x)\rightarrow\varphi_\eta(x)]$ （$\eta'$ は $\eta$ を延長した列）；

2．$\mathcal{M}\models\neg\exists x[\varphi_{\eta^\frown 0}(x)\wedge\varphi_{\eta^\frown 1}(x)]$；

3．$S_\eta=\{p(x)\in S(A):\varphi_\eta(x)\in p(x)\}$の濃度は $\kappa$ より大きい

となるように列 $\eta$ の長さに関する帰納法で作ってゆく．長さ $n-1$ の列に対する $\varphi_\eta$ まで構成されたとする．このとき必要になるのが次の主張である．

**主張**　$\varphi(x)\in L(A)$ を適当にとれば，

$$\{p\in S_\eta:\varphi\in p\}と\{p\in S_\eta:\neg\varphi\in p\}$$

がともに $\kappa$ より大きな濃度を持つようにできる．

このような $\varphi$ が存在しないとする．このとき各 $\varphi(x)\in L(A)$ に対して，$\varphi(x)$ を含む $S_\eta$ のタイプの個数が $\kappa$ 以下，あるいは $\neg\varphi(x)$ を含む $S_\eta$ のタイプの個数が $\kappa$ 以下である．$\varphi(x)$ を含む方が $\kappa$ 以下になるとき，$\varphi^*(x)=\varphi(x)$．そうでないとき（すなわち $\neg\varphi(x)$ を含む方が $\kappa$ 以下のとき），$\varphi^*(x)=\neg\varphi(x)$ とする．$S_\eta$ の中で $\varphi^*$ を含むタイプの全体を $S_{\varphi^*}$ とかくと $S_\eta$ は

$$S\eta=\bigcup_{\varphi(x)\in L(A)}S_{\varphi^*}\cup\{p(x)\in S_1(A):\neg\varphi^*\in p\ \ (\forall\varphi\in L(A))\}$$

のように分解できる．右辺の第 1 番目の集合の濃度は「$\varphi$の選び方」×「$S_{\varphi^*}$の濃度」で抑えられる．すなわち $\kappa\cdot\kappa=\kappa$ 以下である．また右辺で 2 番目の集合に属するタイプは高々 1 個．したがって $S_\eta$ の濃度は$\leq\kappa+1\leq\kappa$ となって矛盾である．　□

主張によって保証される $L(A)$-論理式 $\varphi$ に対して，$\varphi_{\eta^\frown 0}=\varphi_\eta\wedge\varphi$，$\varphi_{\eta^\frown 1}=\varphi_\eta\wedge\neg\varphi$ とすれば，期待される条件を満足する．$B$ を $\varphi_\eta$ たちの中に（パラメータ

として）現れる $A$ の元全体とする．$B$ の濃度は可算である．0と1の無限列 $\zeta$ に対して，$p_\zeta=\{\varphi_{\zeta|n}(x):n<\omega\}$ とする．このとき，$\zeta\neq\zeta'$ に対しては $p_\zeta\neq p_{\zeta'}$ が成り立つ．したがって，$p_\zeta$ たちは可算無限列の個数 $2^{\aleph_0}$ だけある．よって $T$ は $\aleph_0$-安定ではない．　□

**注意63**　$T$ の安定性の強さに関しては，

$$T:\aleph_0\text{-安定}\ \Rightarrow T:\text{超安定}\ \Rightarrow T:\text{安定}$$

の関係が成立する．最初の ⇒ は上の定理と超安定性の定義から，次の ⇒ は超安定性の定義からすぐわかる．

**注意64**

1．$M\supset A$ とする．どんな $N\supset A$ の中にも $M$ が $A$ を動かさないで基本部分構造としてに埋め込めるとき（すなわち $A$-基本写像 $\sigma:M\to N$ があるとき），$M$ を $T$ の $A$ 上の素モデル（prime model）よぶ．$A=\emptyset$ のときは単に $T$ の素モデルという．

2．充足的な論理式 $\varphi(x)\in L(A)$ が $A$ 上完全な論理式であるとは $\varphi(x)$ を含む $A$ 上のタイプが丁度一つ存在することである．

**注意65**　$p(\bar{x})\in S(A)$ が孤立タイプであるのは，$A$ 上の完全な論理式を $p$ が含むときである．

**補題66**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．任意の充足的な $\varphi(x)\in L(A)$ は $A$ 上完全な論理式 $\psi(x)$ に拡大できる．（すなわち $\varphi(x)$ を含む孤立タイプが存在する．）

上で論理式を拡大（extend）するという言葉使いをしたが，$\psi(x)$ が $\varphi(x)$ の拡大とは $\mathcal{M}\models\forall x[\psi(x)\to\varphi(x)]$ の意味である．したがって，解集合の意味においてはかえって小さくなっている．

**証明**：$\varphi(x)$ が完全でなければ，$\varphi$ を含む二つの $A$ 上のタイプが存在．したがって互いに矛盾する $L(A)$-論理式 $\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$ で $\varphi(x)$ を分割することができる．これら二つが再び完全でなければさらにそれぞれが $L(A)$-論理式で分割される．こ

れらの構成がどこかで止まればそのとき完全な論理式が得られる．さもなければ，上の定理での議論と同様に $L(A)$-論理式の樹形構造を作ることができる．これは $\aleph_0$-安定性に反する：もう少し詳しく説明すると次のようになる．数字 0 と 1 の有限列 $\eta\in{}^{\omega>}2$ に対して論理式 $\varphi_\eta(x)\in L(A)$ を

1．$\mathcal{M}\models\forall x[\varphi_\eta(x)\rightarrow\varphi_{\eta'}(x)]$（$\eta$ は $\eta'$ を拡大した列）；

2．$\mathcal{M}\models\neg\exists x[\varphi_{\eta^\frown 0}(x)\wedge\varphi_{\eta^\frown 1}(x)]$

となるよう帰納的に選んでゆく．このとき $\nu\in{}^{\omega}2$ に対して，$p_\nu(x)=\{\varphi_{\nu|n}:n<\omega\}$ を作るとこれらは $2^{\aleph_0}$ 個の異なるタイプに拡大できる．一方これらのタイプに現れるパラメータの集合は可算（$\varphi_\eta$ たちは可算個しかないことに注意）だから，$\aleph_0$-安定性に反する．　□

**定理67（素モデルの存在定理）**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．このとき任意の $A$ 上に $T$ の素モデルが存在する．

**証明**：$M\supset A$ を $T$ のモデルとして一つ固定する．$M$ の中から順に元 $a_i$ を抜きだしていく．$j$ 未満まで抜きだされたとき，$A_j=A\cup\{a_i:i<j\}$とする．運よく $A_j\prec M$ ならばそこで構成を止める．そうでなければ，Tarski-Vaught の判定条件（補題32）により，すべての $a\in A_j$ で $M\models\neg\varphi(a)$ となる $M$ で充足的な $L(A_j)$-論理式 $\varphi(x)$ が存在する．すぐ上の補題66により $\varphi(x)$ は $A_j$ 上の完全な論理式 $\varphi_j(x)$ に拡大できる．$\varphi_j$ の解を一つ選んで $a_j$ とし，$A_{j+1}=A_j\cup\{a_j\}$とおく．以下同様にこの作業を繰り返す．(すべては $M$ の中で行われているから) いつかはこの構成は止まる．すなわち順序数 $\alpha$ が存在して $A\alpha\prec M$ となる．次の主張を示せば証明が終わる．

**主張**　$A_\alpha$ は $A$ 上の素モデルである．

$N\supset A$ を $T$ の任意のモデルとする．孤立タイプはどんなモデルの中でも解を持つことから，$a_i$ たちを順に $N$ の中に $A$-基本写像で埋め込むことができる．したがって $A_\alpha$ は $A$ 上の素モデルである．　□

**注意68**　$A$ が可算のときは，タイプの排除定理を用いても同様の結果を得ることができる．

**注意69**　$A=\emptyset$ の場合，素モデルの存在証明は $\aleph_0$-安定性より少し弱い条件で実行可能である．実際，有限集合上の1変数タイプの個数が可算になるということ（同じことだが $S(\emptyset)$ が可算になること）だけで同様の証明が可能になる．

**問題70**　注意69の条件で素モデルの存在を示せ．

**定義71**　$M\supset A$ が $A$ 上の原子モデル（atomic model）であるとは，任意の $\bar{a}\in M$ に対して，$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が孤立的になることである．

**命題72**　素モデルの存在定理67で構成したモデル $M=A_\alpha$ は $A$ 上の原子モデルである．

**証明**：最初に一般論として，

$$\mathrm{tp}(\bar{b}/A) \text{ と } \mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup\bar{b}) \text{ がともに孤立的} \Rightarrow \mathrm{tp}(\bar{a}\frown\bar{b}/A) \text{ も孤立的}$$

となることに注意する．素モデルの構成の仕方から，$\{a_i : i<\kappa\}$は次の条件を満たしている：

(＊)各 $i<\alpha$ に対して，$\mathrm{tp}(a_i/A\cup\{a_j : j<i\})$ は孤立的である．

示すべきは，どんな有限集合 $\bar{a}\in M$ に対しても $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が孤立的になることである．反例が存在するとして，そのような反例

$$\bar{a}=a_{i_1},\ldots,a_{i_n}\ (i_1<\cdots<i_n<\alpha)$$

の中で，$i_n$ が一番小さいものを選ぶ．条件(＊)によって，$\bar{b}\subset A\cup\{a_j : j<i_n\}$を選んで，$\mathrm{tp}(a_{i_n}/A\cup\bar{b})$ を孤立的にできる．また$\{a_{i_1},\ldots,a_{i_{n-1}}\}\subset\bar{b}$ と仮定できる．さらに反例の $i_n$ の最小性から，$\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ は孤立的である．したがって，

$$\mathrm{tp}(\bar{b}\frown a_{i_n}/A)$$

が孤立的になる．したがって $\mathrm{tp}(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}/A)$ も孤立的となる．これは矛盾である．　□

$A$ 上の素モデルは $A$ 上の同型を除いてただ一つであることが示される．$A$ が可算ならば，その上の素モデルも可算である（言語も可算と仮定していることによる）．

また上の命題により，それは原子モデルである．したがって，往復論法によって，$A$ 上の素モデルはすべて同型になることが示される．

しかし $A$ が非可算の場合の証明はかなり複雑なのでここで述べることはできない．(PartⅢ参照のこと．)

**定理73（飽和モデルの存在定理）** $T$ が $\aleph_0$-安定のとき，可算飽和な $T$ の可算モデルが存在する．

**証明**：基本拡大列$\{M_i : i<\omega\}$を以下のように作る．まず $M_0$ は任意の可算モデル．可算モデル $M_i$ まで構成されたとする．$T$ が $\aleph_0$-安定だから，

$$S=\bigcup\{S(A) : A \text{ は } M_i \text{ の有限部分集合}\}$$

は可算集合である．したがって各 $p\in S$ の解 $a_p\in\mathcal{M}$ を一つずつ選び，集合 $X_i=M_i\cup\{a_p : p\in S\}$とすれば $X_i$ も可算．可算モデル $M_{i+1}\supset X_i$ がLöwenheim-Skolem の定理（定理36）により存在．最後に $M=\bigcup_i M_i$ とする．基本拡大列の定理（命題38）により $M$ は $T$ のモデルになる．$M$ が可算なのは明らか．$M$ が可算飽和になることを示せばよい．$A\subset M$ を任意の有限集合とすれば，$A\subset M_i$ となる $i<\omega$ が存在する．したがって $S(A)$ のすべてのタイプは $M_{i+1}$ ですでに解をもっている．よって $M$ は可算飽和である． □

上の定理73と同じ議論により，$T$ が正則基数 $\lambda$ で安定ならば，濃度 $\lambda$ の飽和モデルを持つことが示される．実は $\lambda$ が正則でないときでも，安定な基数において飽和モデルの存在を示すことができる．しかし，このためには安定な構造の性質をもっと調べておく必要がある．

## 3.2 安定性の同値条件

安定という条件はタイプの数が少ないという条件だった．この条件は技術的には使いやすい条件であるが，その意味が分かりやすいとは言えない．そこでいくつかの同値条件を捜すことにする．

**定義74**　理論 $T$ が順序（order property）を持つとは，次の条件を満たす $L$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ と $\bar{a}_i\in\mathcal{M}$ $(i\in\omega)$（ただし $\mathrm{lh}(\bar{a}_i)=\mathrm{lh}(\bar{x})=\mathrm{lh}(\bar{y})$）が存在することである：任意の $i,j\in\omega$ に対して，

$$i<j\Longleftrightarrow\mathcal{M}\vDash\varphi(\bar{a}_i,\bar{a}_j).$$

**定義75**　上の定義において，

1．論理式 $\varphi$ が $\mathcal{M}$ のパラメータを含んでいても同等の定義を得る：$\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{b})$ と $\bar{a}_i\in\mathcal{M}(i\in\omega)$ が順序を与えているとき，論理式 $\psi(\bar{x}\hat{\ }\bar{x}',\bar{y}\hat{\ }\bar{y}')$ を $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{y}')$ $(\mathrm{lh}(\bar{x}')=\mathrm{lh}(\bar{y}')=\mathrm{lh}(\bar{b}))$ とすれば，$\psi(\bar{x}\hat{\ }\bar{x}',\bar{y}\hat{\ }\bar{y}')$ と列 $\bar{a}_i\hat{\ }\bar{b}$ $(i\in\omega)$ が本来の意味で順序を与える．

2．$T$ が順序を持つことの定義を，$L$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ と $\bar{a}_i\in\mathcal{M}$, $\bar{b}_i\in\mathcal{M}(i\in\omega)$ $(\mathrm{lh}(\bar{a}_i)=\mathrm{lh}(\bar{x})$；$\mathrm{lh}(\bar{b}_i)=\mathrm{lh}(\bar{y}))$ が存在して，

$$i<j\Longleftrightarrow\mathcal{M}\vDash\varphi(\bar{a}_i,\bar{b}_j)$$

としても同値な定義になる．1と同様に取り直しをすれば，本来の定義を満たす $\varphi$ と $\bar{a}_i$ を作れるからである．

3．$T$ が順序を持てば，同じ $\varphi$ に対して，勝手な無限全順序で並んだ$\{\bar{a}_i\}$をとり直すことができる．例えば$\{\bar{a}_i:i\in\mathbb{Q}\}$を選んで，$i<j\Longleftrightarrow\mathcal{M}\vDash\varphi(\bar{a}_i,\bar{a}_j)$ とすることができる．これはコンパクト性定理（定理25）から明らかである．

**例76**　順序の定義（定義74）における$\{\bar{a}_i:i<\omega\}$は $T$ の勝手なモデルの中からとれるわけではない：$(A_i\,;<)$ $(i\in\omega)$ を$|A_i|=i$となる互いに共通部分を持たない全順序集合たちとする．言語を $L=\{<,E\}$として $L$-構造 $M$ を，

- $M=\bigcup_{i\in\omega}A_i$；
- $E(x,y)$ は $M$ 上の同値関係で各 $A_i$ はその同値類である；
- $M\vDash a<b\Leftrightarrow a$ と $b$ は同一の $A_i$ に属し $A_i\vDash a<b$

で定義する．このとき $M$ には無限の順序構造はない．しかし $M$ の基本拡大である $\mathcal{M}$ には無限の順序がある．実際，$c_i$ $(i\in\omega)$ を定数記号として，

$$T^* = \mathrm{Th}(M) \cup \{E(c_i, c_j) : i, j \in \omega\} \cup \{c_i < c_j : i < j < \omega\}$$

とすれば，$T^*$の各有限部分は（$c_i$ たちを適当に解釈することにより）$M$ をモデルとして持つ．したがってコンパクト性定理（定理25）により，$T^*$ はモデルを持つ．このモデルは $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(M)$ に基本部分モデルとして埋め込める．したがって $\mathcal{M}$ は無限の順序構造を持つ．よって $\mathrm{Th}(M)$ は順序を持つ．

**問題77**　パラメータだけが異なる論理式たち $\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i)$ $(i \in \omega)$ が次のいずれかを満たせば，$T$ が順序を持つことを示せ：

- 強い意味の順序の存在（strict order property）：$\mathcal{M} \models \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) \rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{a}_j)] \iff i \leq j$；
- 独立集合の存在（independence property）：$\mathcal{M} \models \exists \bar{x}[\bigwedge_{i \in K_1} \varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \bigwedge_{i \in K_2} \neg \varphi(\bar{x}, \bar{a}_i)]$（${}^\forall K_1, K_2 \subset_{\mathrm{fin}} \omega$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$）．

$T$ が順序を持つというのは，$\mathcal{M}$ の中にかなり弱い意味で順序構造が入っているという意味である．後に示すことになるが，$T$ が安定という条件と $T$ が順序を持たないという条件が同値になる．

**定義78**　$A_0 \subset A$ とする．タイプ $p(\bar{x}) \in S(A)$ が $A_0$ 上で定義可能（definable）であるとは，各 $L$-論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ に対して，$L(A_0)$-論理式 $\theta(\bar{y})$ が存在して次が成立することである：

$$\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x}) \iff \mathcal{M} \models \theta(\bar{a}) \quad ({}^\forall \bar{a} \in A).$$

$p \in S(A)$ が $A$ 上で定義可能なとき，単に $p$ は定義可能だという．

**問題79**　$(M; E)$ において，$E$ は $M$ 上の同値関係で，各同値類は無限集合で，同値類の個数も無限になっているとする．$T = \mathrm{Th}(M)$ を考える．このとき，任意のタイプは定義可能になる．（ヒント：$L(\mathcal{M})$-論理式は，本質的に $x = y$, $E(x, y)$ の形の基本的な論理式のブール結合（$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ だけを用いて（$\exists$, $\forall$ を使わずに）作られる論理式）と同等になる．したがって定義可能性を調べるときは，$\varphi(x, y)$ が $x = y$ または $E(x, y)$ の場合を考えることが本質的である．例えば $\varphi$ が

$E(x,y)$ のとき，（i）$E(x,a_0)\in p(x)$ となる $a_0\in A$ があれば，$\theta(y)$ を $E(y,a_0)$ とすればよい．（ii）$E(x,a_0)\in p(x)$ となる $a_0\in A$ がないとき，$\theta(y)$ は $y\neq y$ とすればよい.）

以下の例は，上の問題より複雑に見えるが，実は全く同じ方法で定義可能性を示すことができる．

**例80**　$G=(G\,;0,*+*,-*)$ をアーベル群とし，$T=\mathrm{Th}(G)$ を考える．各 $p(\bar{x})\in S(A)$，$A\subset\mathcal{M}$ は定義可能である：$D_n(x)$ を $\exists y[x=\overbrace{y+\cdots+y}^{n}]$ とすると，すべての論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ は等式と $D_n(t)$（$t$ は項）たちのブール結合と同等になる．したがって，これら基本的な論理式について，定義可能性の条件を調べればよい．例えば，$p(x)\in S_1(A)$ で $\psi(x,y)$ が $D_n(k\cdot x+l\cdot y)$（$k,l\in\omega$）のとき，

（i）　$\psi(x,a_0)\in p(x)$ となる $a_0\in A$ があるとき：$d$ を $p$ の（$\mathcal{M}$ での）解とすれば，

$$\mathcal{M}\models D_n(k\cdot d+l\cdot a_0).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\psi(\bar{x},\bar{a})\in p &\iff \mathcal{M}\models D_n(k\cdot d+l\cdot a)\\ &\iff \mathcal{M}\models D_n(l\cdot a-l\cdot a_0).\end{aligned}$$

よって $\theta(y)$ を $D_n(l\cdot y-l\cdot a_0)\in L(A)$ とすれば，

$$\psi(x,a)\in p \iff \mathcal{M}\models\theta(a).$$

（ii）　$\psi(x,a_0)\in p(x)$ となる $a_0\in A$ がないとき：$\theta(y)$ を $y\neq y$ とすれば大丈夫.

**定義81**　$\Sigma(\bar{x})$ を自由変数 $\bar{x}$ を持つ $L(\mathcal{M})$-論理式の充足的な集合とする．また $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を $L$-論理式とする．各 $n\in\omega$ に対して，変数（列）の集合 $\{\bar{x}_\nu : \nu\in{}^n2\}\cup\{\bar{y}_\eta : \eta\in{}^{n>}2\}$（$\mathrm{lh}(\bar{x}_\nu)=\mathrm{lh}(\bar{x})$，$\mathrm{lh}(\bar{y}_\eta)=\mathrm{lh}(\bar{y})$）を用意して，$\Sigma_n$ を次の論理式の集合の和集合とする：

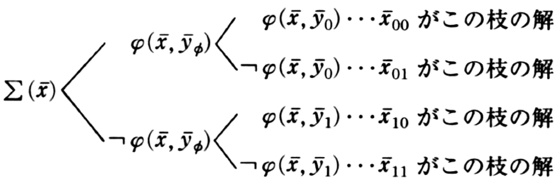
1．$\bigcup_{\nu\in{}^n2}\Sigma(\bar{x}_\nu)$；

2．$\{\varphi(\bar{x}_\nu, \bar{y}_{\nu|k}) : \nu \in {}^n 2, k < n, \nu(k) = 0\}$；

3．$\{\neg\varphi(\bar{x}_\nu, \bar{y}_{\nu|k}) : \nu \in {}^n 2, k < n, \nu(k) = 1\}$.

$\sum_n$ を $\sum$ から始まる高さ $n$ の $\varphi$-樹形図とよぶことにする．$\sum = \emptyset$ のときは単に高さ $n$ の $\varphi$-樹形図とよぶ．

**注意82**　$\sum_2$ の意味を図式的にかくと下のようになる：




**定義83**　$\sum(\bar{x})$ からはじまる充足的な $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$-樹形図の高さに有限の上限があれば，それを

$$\mathrm{R}(\textstyle\sum, \varphi, 2)$$

で表わし，$\sum$ の $(\varphi, 2)$-ランクとよぶ．（2は樹形図が2分岐樹形図 (binary tree) なことを意味している．）高さに上限がないとき，$\mathrm{R}(\sum, \varphi, 2) = \omega$ とする．

**補題84**　$\sum(\bar{x})$ の有限部分集合 $\Delta(\bar{x})$ を選んで，$\mathrm{R}(\sum, \varphi, 2) = \mathrm{R}(\Delta, \varphi, 2)$ とすることができる．

**証明**：勝手な $\Delta(\bar{x}) \subset \sum(\bar{x})$ に対して，$\mathrm{R}(\sum, \varphi, 2) \leq \mathrm{R}(\Delta, \varphi, 2)$ は明らかである．実際 $\sum$ からはじまる $\varphi$-樹形図が充足的ならば，その部分集合である $\Delta$ からはじまる $\varphi$-樹形図も充足的になる．

いま $n = \mathrm{R}(\sum, \varphi, 2)$ とすれば，高さ $n+1$ の $\varphi$-樹形図 $\sum_{n+1}$ は充足的でない．$\mathcal{M}$ において充足的なことと，有限充足的なことは同じである．したがって，$\Delta(\bar{x}) \subset_{\mathrm{fin}} \sum$ が存在して，$\Delta$ から始まる高さ $n+1$ の $\varphi$-樹形図が充足的でない．よって，$\mathrm{R}(\Delta, \varphi, 2) \leq n$．両方向きの不等式が示されたので，補題が証明された．　□

**問題85**　$\mathrm{R}(x = x, \varphi(x, y), 2) = \alpha$ であっても $\mathrm{R}(\psi(x), \varphi(x, y), 2) < \alpha$ かつ $\mathrm{R}(\neg\psi(x), \varphi(x, y), 2) < \alpha$ となることがある．いずれもが $\alpha$ 未満になることがある．そのよう

な例をあげよ．（ヒント：$T=\mathrm{Th}(A\cup B\,;E)$，ただし $A$，$B$ は共通部分のない無限集合，$E$ は $A$ と $B$ を同値類として持つ同値関係とする．$\mathrm{R}(x=x, E(x,y), 2)=1$ だが，勝手な $a\in A$ に対して，$\mathrm{R}(E(x,a), E(x,y), 2)=0$，$\mathrm{R}(\neg E(x,a), E(x,y), 2)=0$ である．）

**命題86**　$p(\bar{x})$ をタイプ，$\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を $L$-論理式として，$p|\varphi=\{\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \varphi(\bar{x},\bar{a})\in p\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \neg\varphi(\bar{x},\bar{a})\in p\}$ とする．いま可算の $A$ に対して，$\{p|\varphi : \psi(\bar{x})\in p\in \mathrm{S}(A)\}$ が非可算となれば，$\mathrm{R}(\psi(\bar{x}), \varphi(\bar{x},\bar{y}), 2)=\omega$ である．

**証明：**「$\aleph_0$-安定⇒各濃度で安定」の証明（定理62）と全く同じ議論である．$\psi(\bar{x})$ を適当な $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ で分割して，$\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と矛盾しない $p|\varphi$ たちの数と $\psi(\bar{x})\wedge\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と矛盾しない $p|\varphi$ たちの数をともに非可算にする．以下同様に続けてゆけば，$\psi$ から始まる高さ $\omega$ の $\varphi$-樹形図を得る．　□

**定理87（安定性の基本定理）**　$T$ に関する次の条件は同値である：

1．$T$ は安定である；
2．$T$ は順序を持たない；
3．各論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ ごとに，充足的な $\varphi$-樹形図の高さには有限の上限がある．すなわち $\mathrm{R}(\bar{x}=\bar{x}, \varphi, 2)<\omega$；
4．すべてのタイプ $p$ は定義可能である．

**証明：**１⇒２⇒３⇒４⇒１の順に証明を行う．

**1⇒2.** 対偶を示す．$T$ が順序を持ったとする．順序の定義に現れる $L$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ をとる．$\kappa$ を勝手な無限基数として，$\kappa$-安定にならないことを示そう．基数 $\lambda$ を

$$\kappa^{\lambda}>\kappa$$

となる最小の基数とする．このとき $\kappa^{<\lambda}=\kappa$ である．$(D\,;<)$ を濃度が $\kappa$ の稠密(dense)で最大最小のない全順序集合とする（$(\mathbb{Q}\,;<)$ の基本拡大と思えばよい）．各 $\eta\in{}^{\lambda>}D$ に対して，$\bar{a}_\eta$ を選び，

$$\mathcal{M}\vDash\varphi(\bar{a}_\eta,\bar{a}_{\eta'}) \iff \eta<\eta' \text{（辞書式順序）}$$

とできる．（注意75の 3 番参照.）このとき各 $\nu\in{}^{\lambda}D$ に対して，

$$\Gamma_\nu(\bar{x})=\{\varphi(\bar{x},\bar{a}_\eta):\eta\in{}^{\lambda>}D,\ \nu<\eta\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{a}_\eta):\eta\in{}^{\lambda>}D,\ \nu>\eta\}$$

とする．

**主張**　$\Gamma_\nu$ は有限充足的である．

**主張の証明**：$\Gamma_\nu(\bar{x})$ の有限部分集合 $\Delta(\bar{x})$ に現れるパラメータを

$$\bar{a}_{\eta_1},\ldots,\bar{a}_{\eta_k},\bar{a}_{\eta_{k+1}},\ldots,\bar{a}_{\eta_n}\ (\eta_1<\cdots<\eta_k<\nu<\eta_{k+1}<\cdots<\eta_n)$$

とする．順序集合${}^{\lambda>}D$ は稠密だから，$\eta_k$ と $\eta_{k+1}$ の間に $\nu_0\in{}^{\lambda>}D$ をとれる．このとき $\eta_i<\nu\Longleftrightarrow\eta_i<\nu_0$．すなわち $\bar{a}_{\nu_0}$ が $\Delta(\bar{x})$ の解となる．　□

$A$ を $\bar{a}_\eta$ たち全体とすれば，濃度が $\kappa$ の集合になる（$\kappa^{<\lambda}=\kappa$ による）．また $p_\nu(\bar{x})\in S(A)$ を $\Gamma_\nu(\bar{x})$ のタイプへの拡大とすれば，これらは異なるタイプになる．したがって $|S(A)|\geq\kappa^\lambda>\kappa$．これは $T$ が $\kappa$ で安定でないことを意味する．

**2⇒3.** 対偶を示す．充足的な $\varphi(\bar{x},\bar{y})$-樹形図の高さに上限がない（$R(\bar{x}=\bar{x},\varphi,2)=\omega$）とする．このとき次の $\sum$ が充足的になる：

$$\textstyle\sum(X,Y)=\{\varphi(\bar{x}_\nu,\bar{y}_{\nu|k}):\nu\in{}^{\omega}2,k<\omega,\nu(k)=0\}$$
$$\cup\{\neg\varphi(\bar{x}_\nu,\bar{y}_{\nu|k}):\nu\in{}^{\omega}2,\ k<\omega,\nu(k)=1\}.$$

ただし $X=\{\bar{x}_\nu:\nu\in{}^{\omega}2\}$，$Y=\{\bar{y}_\eta:\eta\in{}^{\omega>}2\}$は変数の集合とする．まず $\bar{y}_\eta$ たちのタイプはすべて同一にできることを示そう．

**主張**　$\Gamma(\bar{x})$ を $A$ 上の論理式の集合として，$\sum(X,Y)\cup\bigcup_{\nu\in{}^{\omega}2}\Gamma(\bar{x}_\nu)$ が充足的とする．このとき $r(\bar{y})\in S(A)$ を，$\sum(X,Y)\cup\bigcup_{\nu\in{}^{\omega}2}\Gamma(\bar{x}_\nu)\cup\bigcup_{\eta\in{}^{\omega>}2}r(\bar{y}_\eta)$ が充足的となるように選ぶことができる．

**主張の証明**：$D=\{\bar{d}_\eta\}_\eta$ たちを，$\sum(X,D)\cup\bigcup_{\nu\in{}^{\omega}2}\Gamma(\bar{x}_\nu)$ が充足的になるように選ぶ．$\theta(\bar{y})\in L(A)$ が与えられたとき，次のいずれかが成立：

- $\{\bar{d}_{\eta'}:\eta'\supset\eta,\ \mathcal{M}\models\theta(\bar{d}_{\eta'})\}$が有限となる $\eta\in{}^{\omega>}2$ が存在する；
- $\{\bar{d}_{\eta'}:\eta'\supset\eta,\ \mathcal{M}\models\theta(\bar{d}_{\eta'})\}$は $\eta\in{}^{\omega>}2$ によらず常に無限．

前者の場合は $\eta$ より十分に上の樹形図を考えることにより，

$$\sum(X, Y) \cup \bigcup_{\nu \in {}^{\omega}2} \Gamma(\bar{x}_\nu) \cup \{\neg\theta(\bar{y}_\eta) : \eta \in {}^{\omega>}2\}$$

が充足的となる．後者の場合は，

$$\sum(X, Y) \cup \bigcup_{\nu \in {}^{\omega}2} \Gamma(\bar{x}_\nu) \cup \{\theta(\bar{y}_\eta) : \eta \in {}^{\omega>}2\}$$

が充足的となる．以上の議論を 1 ステップとして，$\sum(X, Y) \cup \bigcup_{\nu \in {}^{\omega}2} \Gamma(\bar{x}_\nu)$ に $L(A)$ -論理式を順次付加してゆけば，最終的に適当な拡大 $r(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ で，

$$\sum(X, Y) \cup \bigcup_{\nu \in {}^{\omega}2} \Gamma(\bar{x}_\nu) \cup \bigcup_{\eta \in {}^{\omega>}2} r(\bar{y}_\eta)$$

が充足的となるものが得られる．（正確にはコンパクト性を使う．）　□

順序を表現する列$\{\bar{a}_i : i < \omega\}$ と $\{\bar{b}_i{}^\frown \bar{b}'_i : i < \omega\}$ を帰納的に作る．まず $\sum(X, Y)$ が充足的だから，$\bar{y}_\phi$ の解 $\bar{b}_0$, $\bar{y}_0$ の解 $\bar{b}'_0$, および $\bar{x}_\nu$ の解 $\bar{a}_0$ をとる．ただし，$\nu(0) = 0$, $\nu(1) = 1$ とする．このとき，次が成立している．

- $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_0, \bar{b}_0) \not\leftrightarrow \varphi(\bar{a}_0, \bar{b}'_0)$ ;
- $\sum(X, Y) \cup \{\varphi(\bar{x}_\nu, \bar{b}_0) \not\leftrightarrow \varphi(\bar{x}_\nu, \bar{b}'_0) : \nu \in {}^{\omega}2\}$は充足的．

実際 $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_0, \bar{b}_0) \wedge \neg\varphi(\bar{a}_0, \bar{b}'_0)$ が成立しているから，最初の条件は成立．また 2 番目の条件は樹形図の列0, 1より上の部分を考えれば明らかである．$n$ 以下の $i$ に対する $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i{}^\frown \bar{b}'_i$ が次の条件を満たすようにできたとする．

1．$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \leftrightarrow \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}'_j) \iff i < j$ ;

2．$\sum(X, Y) \cup \{\varphi(\bar{x}_\nu, \bar{b}_i) \not\leftrightarrow \varphi(\bar{x}_\nu, \bar{b}'_i) : i \leq n, \nu \in {}^{\omega}2\}$は充足的．

主張を使い $r(\bar{y}) \in S(\bigcup_{i \leq n} \bar{a}_i{}^\frown \bar{b}_i{}^\frown \bar{b}'_i)$ を，

$$\sum(X, Y) \cup \{\varphi(\bar{x}_\nu, \bar{b}_i) \not\leftrightarrow \varphi(\bar{x}_\nu, \bar{b}'_i) : i \leq n, \nu \in {}^{\omega}2\} \cup \bigcup_{\eta \in {}^{\omega>}2} r(\bar{y}_\eta)$$

が充足的になるようにして，$\bar{b}_{n+1}$ を $\bar{y}_\phi$ の解，$\bar{b}'_{n+1}$ を $\bar{y}_0$ の解，$\bar{a}_{n+1}$ を $\bar{x}_\nu$ の解としてとる．ただし，$\nu(0) = 0$, $\nu(1) = 1$ である．$\bar{b}_{n+1}$ と $\bar{b}'_{n+1}$ が $\{\bar{a}_i : i \leq n\}$上で同じタイプ $r$ を満たすから，

$$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}_i,\bar{b}_{n+1})\ \leftrightarrow\ \varphi(\bar{a}_i,\bar{b}'_{n+1})\ (^\forall i\leq n).$$

が成立する．さらに帰納法の仮定（条件２）と $\bar{a}_{n+1}$ の選び方により，

$$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}_{n+1},\bar{b}_i)\ \not\leftrightarrow\ \varphi(\bar{a}_{n+1},\bar{b}'_i)\ (^\forall i\leq n+1).$$

以上により，$n+1$ まで条件 1,2 を満たす列を作ることができた．結局我々は，$i,j\in\omega$ に対して，

$$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}_i,\bar{b}_j)\ \leftrightarrow\ \varphi(\bar{a}_i,\bar{b}'_j)\Longleftrightarrow i<j$$

を得たことになる．これは $T$ が順序を持つことを意味する． □

**3⇒4.** 3 を仮定する．$p(\bar{x})\in\mathrm{S}(A)$ を任意のタイプとして，$\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を $L$-論理式とする．補題84により，$\psi(\bar{x})\in p$ を $\mathrm{R}(p(\bar{x}),\varphi(\bar{x},\bar{y}),2)=\mathrm{R}(\psi(\bar{x}),\varphi(\bar{x},\bar{y}),2)$ となるように選べる．このとき，

**主張**　$\bar{y}$ と同じ長さを持つ任意の $\bar{a}\in A$ に対して，

$$\varphi(\bar{x},\bar{a})\in p(\bar{x})\Longleftrightarrow\mathrm{R}(\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi(\bar{x},\bar{y}),2)\geq n,$$

ただし $n=\mathrm{R}(p(\bar{x}),\varphi(\bar{x},\bar{y}),2)$ である．

**主張の証明**：⇒の向きは明らかである．⇐を示す．$\mathrm{R}(\psi\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi,2)\geq n$ なのに $\varphi(\bar{x},\bar{a})\notin p(\bar{x})$ として矛盾を導く．$p$ はタイプだから，$\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})\in p(\bar{x})$．したがって，$\mathrm{R}(\psi\wedge\neg\varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi,2)\geq n$．このことは，$\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a})$ からはじまる高さ $n$ の $\varphi$-樹形図が充足的で，$\psi(\bar{x})\wedge\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})$ からはじまる高さ $n$ の $\varphi$-樹形図も充足的なことを意味する．したがって，$\psi$ から始まる高さ $n+1$ の $\varphi$-樹形図が充足的になる．よって $\mathrm{R}(\psi,\varphi,2)\geq n+1$．これは $\psi\in p$ の選び方に反する． □

上の主張の右辺 $\mathrm{R}(\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi(\bar{x},\bar{y}),2)\geq n$ は定義から，$\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a})$ からはじまる高さ $n$ の $\varphi$-樹形図

$$\Gamma=\Gamma(\{\bar{x}_\nu:\nu\in{}^{n}2\},\{\bar{y}_\eta:\eta\in{}^{n>}2\},\bar{a})$$

が充足的なことである．しかし $\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a})$ がただ一つの論理式だから，$\Gamma$ は

有限個の論理式の集合である．したがって $\Gamma$ が充足的なことと，$\Gamma$ の中の論理式をすべて $\wedge$ で結び付け，さらに自由変数 $\bar{x}_\nu$, $\bar{y}_\eta$ たちを $\exists$ で束縛した論理式 $\theta(\bar{a})$ が $\mathcal{M}$ で成立することは同値になる．すなわち，

$$\varphi(\bar{x},\bar{a})\in p \Longleftrightarrow \mathcal{M}\models\theta(\bar{a}) \quad ({}^\forall\bar{a}\in A)$$

を得る．

**4⇒1.**　4 を仮定する．$\lambda$ を

$$\lambda^{\aleph_0}=\lambda$$

なる無限基数とするとき，$T$ が $\lambda$ で安定になることを示す．$A$ を濃度 $\lambda$ の集合とする．各タイプ $p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ は，何によって決定されるだろうか？　それは各 $L$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ に対する，$p|\varphi=\{\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \bar{a}\in A,\ \varphi(\bar{x},\bar{a})\in p\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \bar{a}\in A,$ $\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})\in p\}$で決まる．しかし 4 の条件により，各 $p|\varphi$ は適当な $\theta_\varphi(\bar{y})\in L(A)$ により，

$$p|\varphi=\{\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \bar{a}\in A, \mathcal{M}\models\theta_\varphi(\bar{a})\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \bar{a}\in A, \mathcal{M}\models\neg\theta_\varphi(\bar{a})\}$$

という形をしている．したがって，$p\in \mathrm{S}(A)$ は対応 $\varphi\mapsto\theta_\varphi$ の選び方で決まる．すなわち，$|\mathrm{S}(A)|$は

$$(|L|+|A|+\aleph_0)^{|L|+\aleph_0}=\lambda^{\aleph_0}$$

で抑えられる．いま $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$ だから，$|S(A)|\leq\lambda$ を得る．すなわち $T$ は $\lambda$ で安定である．　□

**注意88**　$T$ が安定のとき，少なくとも $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$ を満たす $\lambda$（例えば $2^{\aleph_0}$）に対して $\lambda$-安定となっていることが 4⇒1 の証明からわかる．ただしこれは $T$ の可算性による．一般の $T$ に対しては $\lambda^{|T|}=\lambda$ なる $\lambda$ において $T$ が安定になる．

# 第4章　独立の概念と非分岐拡大

この章では理論 $T$ は安定と仮定する．

安定な理論の $\mathcal{M}$ において，$\mathcal{M}$ の部分集合の間に独立の概念を定義するのがこの章の目標である．独立の概念の存在は安定性の大きな特徴でありよい点である．

ベクトル空間 $V$ とその部分空間 $W$ を考えよう．$\vec{a}, \vec{b} \in V$ に対して，

$(*)_{\vec{a}, \vec{b}}$　　　　$\vec{a}$ が $W \cup \{\vec{b}\}$ の一次結合でかける $\Rightarrow$ $\vec{a} \in W$

という関係を考えよう．関係 $(*)_{\vec{a}, \vec{b}}$ は $\vec{a} \in W$ あるいは $\vec{b} \in W$ の場合は常に成立するが，$V-W$ に制限すれば，それは $W$ 上の一次独立性と一致する．我々が一般の安定な構造上に定義する独立性は関係 $(*)_{\vec{a}, \vec{b}}$ を模したものである．

## 4.1　定義と基本的性質

**定義89**

1．$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ を充足的な論理式とする．$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ の解を持たないモデル $M \supset A$ があるとき，$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ は $A$ 上分岐 (fork over $A$) するという．

2．論理式の充足的な集合 $\sum(\bar{x})$ が $A$ 上分岐するとは，適当な有限個の $\varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_n(\bar{x}) \in \sum(\bar{x})$ に対して，$\varphi_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\bar{x})$ が $A$ 上分岐することである．

3．二つのタイプ $p$，$q$，$p \subset q$ に対して，

(a) $q$ が $p$ の分岐拡大 (forking extension，記号：$p \subset_{\mathrm{f}} q$ または $q \supset_{\mathrm{f}} p$) $\Longleftrightarrow$ $q$ が $\mathrm{dom}(p)$ 上分岐する；

(b) $q$ が $p$ の非分岐拡大 (non-forking extension，記号：$p \subset_{\mathrm{nf}} q$ または $q \supset_{\mathrm{nf}} p$) $\Longleftrightarrow$ $q$ が $\mathrm{dom}(p)$ 上分岐しない．

**問題90**

1．論理式 $\varphi(\bar{x}) \in L(\bar{a})$ が $A$ 上分岐する論理式であるためには $\bar{a} \notin A$ が必要である．（実はさらに $\bar{a} \notin \mathrm{acl}(A)$ が必要である（acl(＊) に関しては 6 章を参照のこと）．）

2．$M$ がモデルで $a \notin M$ のとき，論理式「$x=a$」は $M$ 上分岐することを示せ．

3．標数 0 の代数閉体の理論 $T=\mathrm{Th}(\mathrm{C}\,;0,1,+,\cdot)$ を考える．超越元 $a \in \mathcal{M}$ に対して，論理式 $x^n=a$ $(n>0)$ は $\emptyset$ 上分岐することを示せ．（ヒント：$\bar{\mathrm{Q}} \prec \mathcal{M}$ である．）

論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ が $A$ 上分岐するのは，$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ の解が $A$ 以上に $\bar{a}$ に（正確には $A \cup \bar{a}$ に）強く結びついているときである．その表現が上の定義89になったわけである．

**定義91**　$\mathrm{tp}(\bar{a}/A \cup \bar{b})$ が $A$ 上分岐しないとき，$\bar{a}$ と $\bar{b}$ が $A$ 上独立である (independent over $A$，記号：$\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$) という．明らかに $\bar{a} \downarrow_A \bar{b} \iff \bar{a} \downarrow_A (A \cup \bar{b})$ が成立する．$\bar{a}$ と $\bar{b}$ が $A$ 上独立でないとき，$\bar{a}$ と $\bar{b}$ は $A$ 上従属であるといい，記号 $\bar{a} \not\downarrow_A \bar{b}$ で表わす．$A=\emptyset$ のときは $A$ を省略して $\bar{a} \downarrow \bar{b}$，$\bar{a} \not\downarrow \bar{b}$ とかく．

代数閉体上では「$a \not\downarrow_A \bar{b} \iff a \in \mathrm{acl}(A \cup \bar{b}) - \mathrm{acl}(A)$」が成立している．したがってこの場合には「$a \downarrow_A b \iff b \downarrow_A a$」が成り立っている．一般の場合に，独立の概念 $\bar{a} \downarrow_C \bar{b}$ の $\bar{a}$ と $\bar{b}$ に関する対称性を示すためには準備が必要である．独立の概念自体は安定性とは無関係に定義だけは可能なわけだが，安定性の条件のもとに対称性を示すことができる．これを示すのが以下での大きな目標になる．

**問題92**　$\bar{a}'$ を $\bar{a}$ の部分列，$\bar{b}'$ を $\bar{b}$ の部分列とするとき，$\bar{a} \downarrow_C \bar{b} \Rightarrow \bar{a}' \downarrow_C \bar{b}'$ を示せ．

**定義93**　$A$，$B$ が必ずしも有限でないとき，$A$ と $B$ が $C$ 上独立 $(A \downarrow_C B)$ $\iff$ すべての有限集合 $A_0 \subset A$，$B_0 \subset B$ について $A_0 \downarrow_C B_0$

以下の性質は自由に使う．

**命題94**

1．$\bar{a} \downarrow_A \bar{b} \iff (A \cup \bar{a}) \downarrow_A \bar{b} \iff \bar{a} \downarrow_A (A \cup \bar{b})$．

2．$\mathrm{tp}(\bar{a}/B)\supset_{\mathrm{nf}}\mathrm{tp}(\bar{a}/A) \iff \mathrm{tp}(A\cup\bar{a}/B)\supset_{\mathrm{nf}}\mathrm{tp}(A\cup\bar{a}/A)$.

3．$A\supset B\supset C$, $\bar{a}\downarrow_C A \Rightarrow \bar{a}\downarrow_B A$, $\bar{a}\downarrow_C B$.

4．$p\supset_{\mathrm{nf}} r$, $p\supset q\supset r \Rightarrow p\supset_{\mathrm{nf}} q\supset_{\mathrm{nf}} r$.

5．$\bar{a}\downarrow_A \bar{b}\cup\bar{c} \Rightarrow \bar{a}\cup\bar{b}\downarrow_{A\cup\bar{b}} \bar{c}$.

**証明：**

1．$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{c},\bar{a},\bar{b})$ $(\bar{c}\in A)$ とし，$M\supset A$ を勝手なモデルとする．このとき，$\bar{a}\downarrow_A \bar{b}$ により $\mathcal{M}\models\varphi(\bar{c},\bar{a}',\bar{b})$ なる $\bar{a}'\in M$ を選ぶことができる．

2は1の別表現である．

3．$\bar{a}\downarrow_C A$ は，勝手な $\varphi(\bar{x})\in L(A)$ と $M\supset C$ に対して，

$$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}')\ (^{\exists}a'\in M)$$

ということである．この表現で，モデルを選ぶ範囲を $M\supset B$ に制限すれば，ただちに $\bar{a}\downarrow_B A$ を得る．また $\varphi(\bar{x})$ の動く範囲を $L(B)$-論理式に制限すれば，$\bar{a}\downarrow_C B$ を得る．

4は3の別表現である．また5は1と3からわかる．　□

後に示すが，3，4の逆も実は成立する．

分岐の概念と独立の概念はモデル上では簡単になる：

- $\varphi(\bar{x})$ が $M$ 上分岐しない $\iff$ $\varphi(\bar{x})$ は $M$ に解を持つ；
- $\bar{a}\downarrow_M \bar{b} \iff \mathrm{tp}(\bar{a}/M\cup\bar{b})$ に属する任意の論理式 $\varphi(\bar{x})$ が $M$ に解を持つ．

そこで最初にモデル上で，これらの概念について調べてゆくことにする．

**補題95（モデル上非分岐な拡大の存在）**　$A\supset M$ とする．$L(A)$-論理式の充足的な集合 $\sum(\bar{x})$ が $M$ 上分岐しなければ，$\sum(\bar{x})$ は $M$ 上非分岐なタイプ $p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ に拡大できる．

**証明：**$\sum_0(\bar{x})=\sum(\bar{x})$ に $L(A)$-論理式をひとつずつ付加してゆき最終的にタイプを作る．$\{\varphi_i(\bar{x}) : i<\kappa\}$を $\bar{x}$ を自由変数に持つ $L(A)$-論理式全体とする．$L(A)$-論理式の集合 $\sum_i(\bar{x})$ を $M$ 上分岐しないように少しずつ帰納的に拡大してゆく．

$i=j+1$ のとき．$\sum_j(\bar{x})\cup\{\varphi_j(\bar{x})\}$と$\sum_j(\bar{x})\cup\{\neg\varphi_j(\bar{x})\}$ のどちらかは $M$ 上分岐しない．どちらも分岐したとすれば，$\sum_j(\bar{x})$の有限集合 $F(\bar{x})$を選んで，$F(\bar{x})\cup\{\varphi_j(\bar{x})\}$ と$F(\bar{x})\cup\{\neg\varphi_j(\bar{x})\}$のどちらも $M$に解を持たないようにできる．しかしこれは$F(\bar{x})$ 自体が $M$ に解を持たないことを意味するので矛盾．分岐しない方を $\sum_i(\bar{x})$ とする．

$i$ が極限順序数のとき．$\sum_i(\bar{x})=\bigcup_{j<i}\sum_j(\bar{x})$ とする．分岐が有限的な性質（定義89）だから，和 $\sum_i(\bar{x})$ は $M$ 上分岐しない．

最終的に $\bigcup_{i<\kappa}\sum_i(\bar{x})$ が $M$ 上非分岐なタイプになる．　□

**問題96**　$\bar{a}$，$\bar{b}$ と $M$ が与えられたとき，

- $\bar{a}\downarrow_M\bar{b}'$；
- $\mathrm{tp}(\bar{b}/M)=\mathrm{tp}(\bar{b}'/M)$

を満たす $\bar{b}'$ の存在を示せ．（ヒント：$p(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ の $M\cup\bar{b}$ 上への非分岐拡大を $q(\bar{x})$ とする．この解を $\bar{a}'$ とする．$r(\bar{x},\bar{y})=\mathrm{tp}(\bar{b},\bar{a}'/M)$ とするとき，$r(\bar{x},\bar{a})$ は $M\cup\bar{a}$ 上のタイプになる．したがって解 $\bar{b}'$ を持つ．$\bar{b}'$ が求めるものである．このことは次のように説明してもよい．$\bar{a}$ と $\bar{a}'$ は同じタイプを持つので基本写像 $\sigma$ で $\bar{a}'$ を $\bar{a}$ に移動することができる．$\sigma$ の定義域を十分大きくしておき $\bar{b}$ が定義域の中に入るようにしておく．このとき $\bar{b}$ の行く先 $\sigma(\bar{b})$ が $\bar{b}'$ である．））

**問題97**　$T$ を $\lambda$-安定として，$\kappa$ を $2^\kappa>\lambda$ を満たす最小の基数とする．このとき次の条件1，2を同時に満たすタイプの集合$\{p\eta(x):\eta\in{}^{\kappa>}2\}$は存在しない：

1．各 $\eta\in{}^{\kappa}2$，$i<j<\kappa$ に対して $p_{\eta|i}\subset p_{\eta|j}$；

2．各 $\eta\in{}^{\kappa>}2$ について $p_{\eta^\frown 0}$ と $p_{\eta^\frown 1}$ とを同時に満足する解がない．

（ヒント：1，2を満足するタイプの集合が存在したとする．1，2を満足させながら，$p\eta$ たちから必要ない部分を削ることにより，$|\mathrm{dom}(p_\eta)|\leq|\mathrm{lh}(\eta)|+\aleph_0$ と仮定できる．$B=\bigcup_{\eta\in{}^{\kappa>}2}\mathrm{dom}(p_\eta)$ とすれば $|B|\leq\lambda$ となる．$\zeta\in{}^{\kappa}2$ に対して，$p_\zeta(x)$ を $\bigcup_{i<\kappa}p_{\zeta|i}$ の $B$ への拡大と定義すれば，2より $2^\kappa$ 個の相異なる $p_\eta$ が存在する．）

**定義98（モデル上の弱独立：一時的な定義）**　任意の $L(\bar{b})$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，

$$\varphi(\bar{x}) \text{ が } M \cup \bar{a} \text{ に解を持つ} \Rightarrow \varphi(\bar{x}) \text{ は } M \text{ に解を持つ}$$

が成立するとき，$\bar{a}$ と $\bar{b}$ は $M$ 上弱独立であるという（記号：$\bar{a} \downarrow^{\mathrm{w}}_M \bar{b}$）$A$，$B$ が必ずしも有限でないときは，$A \downarrow^{\mathrm{w}}_M B \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ すべての有限集合 $A_0 \subset A$，$B_0 \subset B$ について $A_0 \downarrow^{\mathrm{w}}_M B_0$ とする．

「独立⇒弱独立」は定義から明らかであるが実は逆も成立する．これを次に示そう．

**定理99**　$A$ と $B$ が $M$ 上弱独立ならば $M$ 上独立になる．

**証明**：独立概念が有限的な性質だから $A$ と $B$ は有限と仮定してよい．さらに表現を簡潔にするため $A=\{a\}$, $B=\{b\}$ と仮定し，$a \downarrow^{\mathrm{w}}_M b$ だが，$a \not\downarrow_M b$ とする．次に $\mathrm{tp}(b/M) = \mathrm{tp}(b'/M)$，$a \downarrow_M b'$ なる $b'$ を選ぶ(問題96参照)．特に次が成立することに注意する：

$$\begin{aligned} &\mathrm{tp}(b/M) = \mathrm{tp}(b'/M)\ ; \\ &\mathrm{tp}(b/M \cup \{a\}) \neq \mathrm{tp}(b'/M \cup \{a\})\ ; \\ &M \cup \{a\} \downarrow^{\mathrm{w}}_M b\ ;\ M \cup \{a\} \downarrow^{\mathrm{w}}_M b'. \end{aligned} \tag{4.1}$$

この条件 4.1 から矛盾（$T$ が安定でないこと）を導く．

**主張 1**　$D \supset M$, $D \downarrow^{\mathrm{w}}_M b$ ならば，$\mathrm{tp}(b/D)$ の拡大 $\mathrm{tp}(b_1/D^*)$, $\mathrm{tp}(b_2/D^*)$ で次を満たすものが存在する：

$$\begin{aligned} &\mathrm{tp}(b_1/D^*) \neq \mathrm{tp}(b_2/D^*)\ ; \\ &D^* \downarrow^{\mathrm{w}}_M b_1,\ \ D^* \downarrow^{\mathrm{w}}_M b_2. \end{aligned}$$

**主張 1 の証明**：定数記号 $c_d$ $(d \in D)$ と 1 変数述語記号 $U$ を用意する．$p^*$ で $p = \mathrm{tp}(b/D)$ の中のパラメーター $d \in D$ を $c_d$ で置き換えた論理式の集合を表わす．次の論理式の集合たちの和集合を $\Sigma$ とする：

1．$D \subset U$ ;†

2．$b$ と $b'$ は $p^*$ の解；

3．$U \cup \{a\} \downarrow^{\mathrm{w}}_M b$ ;‡

---

† $\{U(c_d) : d \in D\}$のこと．

‡ $\{\forall \bar{x} \in U \cup \{a\} [\neg \varphi(\bar{x}, b)] : \varphi(\bar{x}, y) \in L,\ \mathcal{M} \models \neg \varphi(\bar{d}, b)\ ({}^{\forall}\bar{d} \in M)\}$のこと．ただし，表現 $\forall x_1, \ldots, x_n \in X[\theta(x_1, \ldots, x_n)]$ は $\forall x_1, \ldots, x_n [X(x_1) \wedge \cdots \wedge X(x_n) \rightarrow \theta(x_1, \ldots, x_n)]$ の略記である．

4．$U\cup\{a\}\downarrow^{w}_{M} b'$.

$\Sigma$ の有限部分がモデルを持つことを示すために，（例えば）$\psi(x, c_d)\in p^*$ と $M$ に解を持たない $\varphi_1(\bar{x}, b)$，$\varphi_2(\bar{x}, b')$（$\psi(x, y)$，$\varphi_1(\bar{x}, y)$，$\varphi_2(\bar{x}, y)$ は $L$-論理式）を任意にとる．$\mathcal{M}\models\psi(b, d)$ と $D\downarrow^{w}_{M} b$ から，$d'\in M$ をうまく選べば，

$$\mathcal{M}\models\psi(b, d')$$

が成立する．$\mathrm{tp}(b/M)=\mathrm{tp}(b'/M)$ により，

$$\mathcal{M}\models\psi(b', d').$$

さらに，$Ma\downarrow^{w}_{M} b$ および $Ma\downarrow^{w}_{M} b'$ から

$$\mathcal{M}\models\neg\varphi_1(\bar{d}, b)\ \ ({}^{\forall}\bar{d}\in M\cup\{a\})$$

$$\mathcal{M}\models\neg\varphi_2(\bar{d}, b')\ \ ({}^{\forall}\bar{d}\in M\cup\{a\})$$

が成立する．以上のことは，$U$ を $M$，$c_d$ を $d'\in M$ と解釈することにより，$\mathcal{M}$ が $\Sigma$ の有限部分：

$$\{U(c_d), \psi(b, c_d), \psi(b', c_d)\}$$

$$\cup\quad\{\forall\bar{x}\in U\cup\{a\}[\neg\varphi(\bar{x}, b)], \forall\bar{x}\in U\cup\{a\}[\neg\varphi(\bar{x}, b')]\}$$

のモデルになることを示している．よってコンパクト性から，$\Sigma$ 全体のモデルが存在する．そのモデルはもちろん（言語を $L$ に制限すれば）$\mathcal{M}$ の基本部分モデルとしてとれる．$U$ の解釈を $D_1$ とする．さらに $c_d$ の解釈は $d\in D$ 自身と思える（必要なら基本写像で動かせ）．このとき，$b_1=b$，$b_2=b'$，$D^*=D_1\cup\{a\}$として，

- $\mathrm{tp}(b_1/D^*)$ と $\mathrm{tp}(b_2/D^*)$ は異なる $p$ の拡大である
  （∵ 1，2と $\mathrm{tp}(b/M\cup\{a\})\neq\mathrm{tp}(b'/M\cup\{a\})$ による）；
- $D^*\downarrow^{w}_{M} b_1$，$D^*\downarrow^{w}_{M} b_2$　（∵ 3，4による）

を得る．　□

主張1を使うと，問題97にあるようなタイプの列を作ることができる．一つのタイプを二つに分け，さらにその一つ一つをまた二つに分けてゆく：

**主張2**　任意の $\kappa$ に対して，$\mathrm{tp}(b/M)$ を拡大したタイプ $p_\eta$ $(\eta\in{}^{<\kappa}2)$ で次の条件を満たすものがある：

5．各 $\eta\in{}^{\kappa}2$ と $i<j<\kappa$ に対して，$p_{\eta|i}\subset p_{\eta|j}$；

6．各 $\eta\in{}^{\kappa>}2$ について，$p_{\eta^\frown 0}$ と $p_{\eta^\frown 1}$ の共通解はない；

7．$p_\eta$ とその解 $e$ について，$\mathrm{dom}(p_\eta)\downarrow^{\mathrm{w}}_M e$；

**主張2の証明**：$p_\phi=\mathrm{tp}(b/M)$ からはじめて，$\eta$ の長さに関する帰納法で $p_\eta$ を順次構成してゆく．$\eta$ の長さ $\mathrm{lh}(\eta)$ が極限順序数のときはそれまでの $p_{\eta|i}$ の和をとればよい．証明すべきは $p_\eta$ がすでに定義されているとき，上の条件 4-7 を満足する二つの異なる拡大がすることである．このときに主張1を使う．　□

与えられた $\lambda$ に対して，$2^\kappa>\lambda$ となる最小の基数 $\kappa$ をとる．この $\kappa$ に対して，上の主張2を使えば $T$ が $\lambda$-安定でないことが分かる(問題97参照)．この矛盾から，「$a\downarrow^{\mathrm{w}}_M b\Rightarrow a\downarrow_M b$」を得る．　□

**定理100（モデル上の独立概念の対称性）**　$\bar{a}\downarrow_M\bar{b}\Rightarrow\bar{b}\downarrow_M\bar{a}$ である．

**証明**：「$\bar{a}\downarrow_M\bar{b}$ だが $\bar{b}\not\downarrow_M\bar{a}$」を仮定して $T$ が順序を持つことを導く．もしこれができれば，$T$ の安定性に反するので矛盾となる．

仮定 $\bar{b}\not\downarrow_M\bar{a}$ から，$L(M)$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を，

$$\mathcal{M}\vDash\varphi(\bar{a},\bar{b})$$
$$\mathcal{M}\vDash\neg\varphi(\bar{a},\bar{d})\quad({}^\forall\bar{d}\in M)$$

となるように選ぶ．この条件から無限順序を構成する．(注意75参照.) 帰納法により，

$$\mathcal{M}\vDash\varphi(\bar{a}_i,\bar{b}_j)\iff i\le j\quad({}^\forall i,j\le\omega)$$

となる $\{\bar{a}_i : i\le\omega\}$，$\{\bar{b}_i : i\le\omega\}$を定義していく．最初に $\bar{a}_\omega=\bar{a}$，$\bar{b}_\omega=\bar{b}$ として，$\bar{a}_i$，$\bar{b}_i$ を $M$ の中から選んでいく．$\{\bar{a}_i : i=0,\cdots,n,\omega\}$，$\{\bar{b}_i : i=0,\cdots,n,\omega\}$がうまく定義されたとする．特に

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n, \omega\}} \varphi(\bar{a}_j, \bar{b}_\omega) \wedge \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n\}} \neg \varphi(\bar{a}_\omega, \bar{b}_j)$$

である．$\bar{a}_\omega \downarrow_M \bar{b}_\omega$ だから，

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n+1\}} \varphi(\bar{a}_j, \bar{b}_\omega) \wedge \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n\}} \neg \varphi(\bar{a}_{n+1}, \bar{b}_j) \tag{4.2}$$

を満たす $\bar{a}_{n+1} \in M$ が存在する．次に $M \prec \mathcal{M}$ により，$\bar{b}_{n+1} \in M$ を

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n+1\}} \varphi(\bar{a}_j, \bar{b}_{n+1}) \wedge \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n\}} \neg \varphi(\bar{a}_{n+1}, \bar{b}_j) \tag{4.3}$$

となるようにとる．また，$\mathcal{M} \models \neg \varphi(\bar{a}, \bar{d})$ $({}^\forall \bar{d} \in M)$ だから，

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in \{0, \cdots, n+1\}} \neg \varphi(\bar{a}_\omega, \bar{b}_j) \tag{4.4}$$

を得る．4.2，4.3，4.4 と帰納法の仮定を合わせると，

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \iff i \leq j \quad ({}^\forall i, j \in \{0, \cdots, n+1, \omega\})$$

が得られる．以上から $n+1$ 番目まで目的の列を得た．　□

## 4.2　推移性と対称性

**補題101**　集合 $D$ と $A$ に対して，

$$\Phi(D, A) = \{\varphi(\bar{x}) \in L(A) : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{d}) \ ({}^\exists \bar{d} \in D)\}$$

と定義する．$A_0 \subset A$ のとき，集合$\{\Phi(M, A) : A_0 \subset M \prec \mathcal{M}\}$の中に包含関係に関する最小元がある．

**注意102**　充足的な $L$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ はどのモデルでも解を持つ．しかしパラメーターを持つ論理式ではそうとは限らない．上の補題は $L(A)$-論理式を最も少なく充足するモデルが存在することを示している．定理99により $D \downarrow_M A$ と $\Phi(D \cup M, A) = \Phi(M, A)$ は同値である．

**補題の証明**：2 段階に分けて証明する．

**極小元の存在**：$\Phi_i = \Phi(M_i, A)$ $(i < \alpha)$ を集合$\{\Phi(M, A) : M \supset A_0\}$の中の下降列で極大の長さを持つものとする．$M \supset A_0$ が与えられたとき，$M$ と $A_0$ 上のタイプが等

しい $M' \supset A_0$ で,

$$\Phi(M', A) = \bigcap_{i<\alpha} \Phi_i$$

となるものが見つけられることを示そう．変数の集合 $X = \{x_a : a \in M\}$ を用意して，$p(X) = \mathrm{tp}(M/A_0)$ とする．次の論理式の集合を考えよう．

$$\Gamma(X) = p(X) \cup \{\neg \varphi(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}) : a_1, \ldots, a_n \in M,$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L(A) - \textstyle\bigcap_{i<\alpha} \Phi_i\}.$$

$\Gamma$ が有限充足的なことを示そう：$\Gamma$ の任意の有限部分集合 $\Gamma_0$ は

$$\{\psi(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})\} \cup \{\neg \varphi_1(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}), \ldots, \neg \varphi_m(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})\}$$

の形と仮定できる($\psi \in p, \varphi_i \notin \bigcap_{i<\alpha} \Phi_i$)．このとき，$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \notin \Phi(M_\beta, A)$ となる番号 $\beta < \alpha$ がある．さらに $\psi \in L(A_0) \subset L(M_\beta)$ で，$M_\beta$ がモデルだから，$b_1, \ldots, b_n \in M_\beta$ で $\psi$ を満たすものがある．しかし，$\varphi_i$ は $M_\beta$ に解を持たないから，

$$\mathcal{M} \models \neg \varphi_1(b_1, \ldots, b_n) \wedge \cdots \wedge \neg \varphi_m(b_1, \ldots, b_n).$$

このことは $\Gamma_0$ が解を持つことを示す（$\Gamma$ は有限充足的)．したがってコンパクト性により，$\Gamma(X)$ 全体が解を持つ．その解を $M'$ とする．$M'$ が求めるモデルになっている．

**最小元の存在**：$N \supset A$ を任意のモデルとする．極小元の存在から $N'$ を $N$ の $A_0$ 上のコピーで $\Phi(N', N)$ が$\{\Phi(N_1, N) : N_1 \supset A_0\}$の中で極小になるようにとる．さらに $N'$ をもう一度 $A_0$-基本写像で $N$ に動かす．このとき $N$ は $N''$ に動くとする．$\Phi(N, N'')$ も$\{\Phi(N_1, N'') : N_1 \supset A_0\}$の中で極小である．$\Phi(N'', A)$ が求める最小元になることを示そう．任意のモデル $N_1 \supset A_0$ に対して，$\Phi(N'', A) \subset \Phi(N_1, A)$ を示す．必要なら $N_1$ を $N$-基本写像で移動することにより，

$$N_1 \downarrow_N N''$$

と仮定できる（モデル上での非分岐拡大の存在，補題95)．$N \supset A$ だから，この移

動で$\Phi(N_1, A)$ は変化しない．このとき，

$$\Phi(N_1, N'') \subset \Phi(NN_1, N'') \subset \Phi(N, N'').$$

$N_1 \supset A_0$ と $\Phi(N, N'')$ の極小性から，上の式で等号 $\Phi(N_1, N'') = \Phi(N, N'')$ が成立する．したがって $\Phi(N_1, N'') = \Phi(NN_1, N'')$．これは $N \downarrow^{w}_{N_1} N''$を示す．したがって弱独立と独立の同値性（定理99）から，$N \downarrow_{N_1} N''$．モデル上での独立概念の対称性（定理100）から，

$$N'' \downarrow_{N_1} N$$

$A \subset N$ だから，$N'' \downarrow_{N_1} A$．したがって，$\Phi(N'', A) \subset \Phi(N_1, A)$ を得る．　□

**問題103**

1．$M \downarrow a, N \downarrow a$ ならば，$\Phi(M, a) = \Phi(N, a)$ である．

2．$\varphi(x), \psi(x)$ がともに $A$ 上分岐すれば，$\varphi(x) \vee \psi(x)$ も $A$ 上分岐する．

以上の準備のもとに，一般の集合の上での独立概念を解析する．

**定理104（非分岐拡大の存在）**　$B \supset A$ とする．$L(B)$-論理式の集合 $\sum(\bar{x})$ が $A$ 上非分岐ならば，$\sum(\bar{x})$ は $A$ 上非分岐なタイプ $p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(B)$ に拡大できる．

**証明**：モデル上での非分岐拡大の存在証明と同じように $\sum$ を少しづつ拡大してゆければよい．このためには $A$ 上非分岐な $\Gamma(\bar{x})$ と $\varphi(\bar{x}) \in L(B)$ について，

$$\Gamma \cup \{\varphi(\bar{x})\} \text{または} \Gamma \cup \{\neg \varphi(\bar{x})\}$$

のどちらかが $A$ 上分岐しないことを示せば十分である．両方とも $A$ 上分岐したとしよう．補題101により，$L(B)$-論理式を最も少なく充足するモデル $M \supset A$ がとれる．有限な $F(\bar{x}) \subset \Gamma(\bar{x})$ をとって，$\bigwedge F(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x})$，$\bigwedge F(\bar{x}) \wedge \neg \varphi(\bar{x})$ がともに $M$ に解を持たないようにできる．しかしこれは $F(x)$ 自体が $M$ に解を持たないことを意味する．すなわち $\Gamma(x)$ が $A$ 上分岐することを意味して矛盾である．　□

**注意105**　$A_0 \subset A$ のとき，$M \supset A_0$ に対して，次は同値である：

- $M \downarrow_{A_0} A$；

• $M$ は $A_0$ を含むモデルの中で $L(A)$-論理式を最も少なく満たす.

**定理106（独立概念の推移性）**　$A \supset B \supset C$ に対して $A \downarrow_B \bar{a}$, $B \downarrow_C \bar{a}$ とする. このとき, $A \downarrow_C \bar{a}$ が成り立つ.

**証明**：補題101により, $L(C \cup \bar{a})$-論理式を最も少なく満たす $M \supset C$ をとる. $U$ を新しい1変数述語記号, $X = \{x_b : b \in B - C\}$ を変数記号の集合, $q(X) = \mathrm{tp}(B - C/C \cup \bar{a})$ として, $\sum(U, X)$ を次の論理式の集合たちの和集合とする：

1. $U \prec \mathcal{M}$ ; †
2. $C \cup X \subset U$ ; ‡
3. $q(X)$ ;
4. $M$ に解を持たない $\varphi(\bar{x}) \in L(C \cup \bar{a})$ は $U$ にも解を持たない卍.

$\sum(U, X)$ が有限充足的なことは次のように示される：$\psi(x_{b_1}, \ldots, x_{b_n}) \in q$ を勝手にとる. $B \downarrow_C \bar{a}$ により, $d_1, \ldots, d_n \in M$ を選んで,

$$\mathcal{M} \models \psi(d_1, \ldots, d_n)$$

とできる. したがって $U$ として $M$, $x_{b_i}$ として $d_i \in M$ をとれば条件1-4(の有限部分)が満足される. すなわち $\sum(U, X)$ の有限充足性が示されたことになる. $\sum(U, X)$ の $U$ の解 $N$, $x_b$ $(b \in B - C)$ の解 $b'$ が存在する. 条件4と $M$ のとり方により,

$$N \downarrow_C \bar{a} \tag{4.5}$$

である. また条件3により $\{b' : b \in B - C\}$ は $B - C$ と $C \cup \bar{a}$ 上同じタイプを持つ. したがって, $C \cup \bar{a}$-基本写像で $\{b' : b \in B - C\}$ を移動することにより, $b' = b$ と仮定できる. (もちろんこの移動で $N$ も動かざるを得ないが, 式4.5は不変である.) 条件2により, $N \supset B$ である. いま $\varphi \in L(C \cup \bar{a})$ を $A$ で充足的な論理式, $M' \supset C$ を任意のモデルとする. 最初の仮定 $A \downarrow_B \bar{a}$ より, $\varphi$ は $N$ に解を持つ. 次に式4.5

---

† 例えば, $\{\forall \bar{y} \in U[\exists x \varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \in U \varphi(x, \bar{y})] : \varphi \in L\}$ と表わされる.

‡ 例えば, $\{U(c) : c \in C\} \cup \{U(x_b) : b \in B - C\}$ と表わされる.

卍 $\{\forall \bar{x} \in U[\neg \varphi(\bar{x})] : \varphi \in L(C \cup \bar{a}), \mathcal{M} \models \neg \varphi(\bar{d})\ (^\forall \bar{d} \in M)\}$ と表わされる.

により，$\varphi$ は $M'$ に解を持つ．よって $A \downarrow_C \bar{a}$ である．　□

**補題107**　$B \supset A$，$B \downarrow_A \bar{a} \cup \bar{b}$ ならば次が成立する．

$$\bar{a} \underset{A}{\downarrow} \bar{b} \iff \bar{a} \underset{B}{\downarrow} \bar{b}.$$

**証明**：最初に $B$ がモデル $M$ の場合を示す．

⇒．$M \downarrow_A \bar{a} \cup \bar{b}$ より，$M \cup \bar{a} \downarrow_{A \cup \bar{a}} \bar{b}$．これと左辺 $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ から推移性（定理106）により，$M \cup \bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ である．したがって $M \cup \bar{a} \downarrow^{w}_{M} \bar{b}$ である．ここで弱独立から独立がでること（定理99）に注意すれば，$M \cup \bar{a} \downarrow_M \bar{b}$ を得る．

⇐．右辺 $\bar{a} \downarrow_M \bar{b}$ と $M \downarrow_A \bar{b}$ から，推移性（定理106）により，$M \cup \bar{a} \downarrow_A \bar{b}$，したがって $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ を得る．

一般の $B$ の場合は $M \supset B$ を，$M \downarrow_B \bar{a} \cup \bar{b}$ となるように選ぶ．このとき推移性から $M \downarrow_A \bar{a} \cup \bar{b}$ も成立する．したがって，一度モデル $M$ まで持ち上げて議論をして，次に下にもどせばよい．　□

上の補題107を使うと，独立の概念の対称性が一般の集合上で成立することがわかる．

**定理108（独立概念の対称性）**　$\bar{a} \downarrow_A \bar{b} \Rightarrow \bar{b} \downarrow_A \bar{a}$.

**証明**：非分岐拡大の存在定理（定理104）を使って，$M \downarrow_A \bar{a} \cup \bar{b}$ となるモデル $M \supset A$ をとる．したがって，$\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ より，$\bar{a} \downarrow_M \bar{b}$（補題107）．ここでモデル上での対称性（定理100）を使って，$\bar{b} \downarrow_M \bar{a}$．再び補題107から $\bar{b} \downarrow_A \bar{a}$ となる．　□

対称性（定理108）を使うと推移性（定理106）の別表現が可能である．

**系109（非分岐拡大の推移性）**　$p \supset_{\mathrm{nf}} q \supset_{\mathrm{nf}} r \Rightarrow p \supset_{\mathrm{nf}} r$.

# 第5章　定格タイプ，強タイプ

この章では $T$ は安定とする．非分岐拡大が本質的に一つしかないタイプを定格タイプとよぶ．また強タイプという概念を導入する．強タイプは厳密な意味ではタイプではないが定格タイプとみることもできる．タイプ $p(x)\in \mathrm{S}(A)$ が二つの異なる非分岐拡大を持つとき，二つのタイプは $A$ 上の強タイプによって区別される．これが有限同値関係の定理である．

## 5.1　定格タイプと Morley 列

1．タイプ $p(\bar{x})$ が，各 $A\supset \mathrm{dom}(p)$ 上に，ただ一つの非分岐拡大 $q(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ を持つとき，$p(\bar{x})$ は定格的（stationary）であるという．$q$ を $p|A$ とかく．

2．二つの定格的なタイプ $p(\bar{x})$ と $q(\bar{x})$ が共通の非分岐拡大 $r(\bar{x})$ を持つ（すなわち $r(\bar{x})\supset_{\mathrm{nf}}p(\bar{x})$，$r(\bar{x})\supset_{\mathrm{nf}}q(\bar{x})$）とき，$p(\bar{x})$ と $q(\bar{x})$ は平行（pararell）であるという．

**注意111**　$p(\bar{x})$ が定格的であるとき，$p(\bar{x})$ の任意の非分岐拡大は定格的である．これは非分岐拡大が推移律（系109）をみたすことから明らかである．また $p(\bar{x})$ が定格的という条件は，$p(\bar{x})$ が $\mathcal{M}$ 上にただ一つの非分岐拡大を持つことと同値である．

**注意112**　$p|A$ という表現はタイプの定義域の制限の意味にも用いる．定格的なタイプ $p$ の $\mathcal{M}$ への非分岐拡大 $p^*$ を制限したと考えれば記号 $p|A$ を $p$ の $A$ への非分岐拡大の意味に用いるのも妥当なことである．

**定理113**　モデル上のタイプは定格的である．

**証明**：$M$ 上に定格的でないタイプがあったとすれば，対称性により，$\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{b}'$ で

$$\bar{a}\downarrow^{\mathrm{w}}_{M}\bar{b},\ \bar{a}\downarrow^{\mathrm{w}}_{M}\bar{b}'\ ;$$

$$\mathrm{tp}(\bar{b}/M)=\mathrm{tp}(\bar{b}'/M)\ ;$$

$$\mathrm{tp}(\bar{b}/M\cup\bar{a})\neq\mathrm{tp}(\bar{b}'/M\cup\bar{a})$$

を満たすものが存在する．これはまさに定理99の証明で矛盾を導くために用いた条件4.1そのものである．したがって，そこでの議論と全く同様にして，$T$ が安定でないことが示される．　□

**定義114**

1．集合 $I=\{\bar{a}_i : i<\kappa\}$が $A$ 上独立であるとは，共通部分を持たない有限な $X$, $Y\subset\kappa$ に対して，$\{\bar{a}_i : i\in X\}\downarrow_A\{\bar{a}_i : i\in Y\}$が成立することである．

2．定格的なタイプ $p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ の解の集合 $I=\{\bar{a}_i : i<\kappa\}$が $A$ 上独立のとき $I$ を $p$ の長さ $\kappa$ の Morley 列（Morley sequence）という．

3．集合 $I=\{\bar{a}_i : i<\kappa\}$が $A$ 上の一様集合(indiscernible set)であるとは，任意の$K_0$, $K_1\subset\kappa$, $|K_0|=|K_1|<\omega$に対して$\mathrm{tp}(\{\bar{a}_i : i\in K_0\}/A)=\mathrm{tp}(\{\bar{a}_i : i\in K_1\}/A)$が $K_0$，$K_1$ の元の並べ方によらず常に成立することである．$A=\emptyset$ のとき，$I$ は単に一様集合であるという．

**例115**

1．代数的閉体の超越基底は一様集合である．

2．$(\mathbb{Q},<)$ において，$\{1,2\}$は一様集合ではない：$\mathbb{Q}\models(1<2)\wedge(\neg 2<1)$．

**補題116**　$\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を論理式とする．$n_\varphi\in\omega$ を適当にとれば，どんな一様集合 $I=\{\bar{b}_i : i\in\kappa\}$（$\mathrm{lh}(\bar{b}_i)=\mathrm{lh}(\bar{y})$）と $\bar{a}$（$\mathrm{lh}(\bar{a})=\mathrm{lh}(\bar{x})$）に対しても，

- $|\{i : \mathcal{M}\models\varphi(\bar{a},\bar{b}_i)\}|<n_\varphi$ または，
- $|\{i : \mathcal{M}\models\neg\varphi(\bar{a},\bar{b}_i)\}|<n_\varphi$

とできる．

**証明**：$\kappa$ を勝手な無限基数とする．上のような $n_\varphi$ がなければ，コンパクト性により，$I$ を適当に選ぶと，各 $K\subset\kappa$ に対して，$p_K(\bar{x})=\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i\in K\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i\in\kappa-K\}$が充足的になる．このことは，濃度 $\kappa$ の集合上に $2^\kappa$ 個のタイプが存在

することを意味するので安定性に反する． □

独立概念の対称性から次が成り立つ：

**命題117** $I=\{\bar{a}_i : i<\kappa\}$, $I_\alpha=\{\bar{a}_i : i<\alpha\}$とする．各 $\alpha<\kappa$ に対して，$\bar{a}_\alpha \downarrow_A I_\alpha$ が成り立てば，$I$ は $A$ 上独立である．

**証明**：表現を簡単にするため $A=\emptyset$ とする．$I$ が独立でなかったとすれば，共通部分がない有限な $X$, $Y\subset\kappa$ を選んで，$\{\bar{a}_i : i\in X\} \not\downarrow \{\bar{a}_i : i\in Y\}$にできる．いまこのような $X$, $Y$ の中で$|X|+|Y|$を最小に選んでおく．$X\cup Y$ の中の一番大きな番号を $i_M$ とする．独立概念の対称性（定理108）から $i_M\in X$ としてよい．$|X|+|Y|$の最小性から$\{\bar{a}_i : i\in X-\{i_M\}\} \downarrow \{\bar{a}_i : i\in Y\}$．したがって推移性（定理106）から，$\{\bar{a}_i : i\in X\} \not\downarrow_{\{\bar{a}_i : i\in X-\{i_M\}\}} \{\bar{a}_i : i\in Y\}$を得る．よって，

$$\bar{a}_{i_M} \not\downarrow_{\{\bar{a}_i : i\in X-\{i_M\}\}} \{\bar{a}_i : i\in Y\}.$$

しかしこれは仮定 $a_{i_M} \downarrow I_{i_M}$ に反する． □

この命題を使うと次の定理がでる：

**定理118（Morley 列の存在）** $p(\bar{x})$ を定格的なタイプとする．このとき任意の長さの $p$ の Morley 列が存在する．

**証明**：$I=\{\bar{a}_j : j<i\}$まで Morley 列ができたとき，$\bar{a}_i$ を $p|(\mathrm{dom}(p)\cup I)$ の解とすればよい． □

**定理119（Morley 列の一様性）** 定格的なタイプ $p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ の同じ長さの Morley 列 $I$, $J$ は $A$ 上同じタイプを持つ．したがって Morley 列は一様集合である．

**証明**：長さが有限の場合が本質的である．有限列 $I$, $J$ の長さに関する帰納法で証明する．$I=I_0\cup\{\bar{a}\}$, $J=J_0\cup\{\bar{b}\}$とする．帰納法の仮定から，$\mathrm{tp}(I_0/A)=\mathrm{tp}(J_0/A)$ である．したがって $A$-基本写像 $f$ で $J_0$ を $I_0$ に運ぶものがある．$\mathrm{tp}(\bar{a}/I_0\cup A)$ と $\mathrm{tp}(f(\bar{b})/I_0\cup A)$ はともに，$p$ の非分岐拡大である．$p$ が定格的なことから，この二つのタイプは一致する．よって，

$$\mathrm{tp}(J_0\cup\{\bar{b}\}/A)=\mathrm{tp}(f(J_0\cup\{\bar{b}\})/A)$$

$$=\mathrm{tp}(I_0\cup\{f(\bar{b})\}/A)$$
$$=\mathrm{tp}(I_0\cup\{\bar{a}\}/A)$$

を得る．　□

**問題120**　$I=\{\bar{a}_i : i\in\kappa\}$とする．このとき，$I$ が独立なことと任意の $i\in\kappa$ に対して，$\bar{a}_i$ と$\{\bar{a}_j : j\in\kappa-\{i\}\}$が独立なことは同値である．これを示せ．

**問題121**　$\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L$ とする．$\varphi(\bar{x},\bar{a})$ がどんな $A$-基本写像 $\sigma$ に対しても動かない ($\mathcal{M}\models\forall x[\varphi(\bar{x},\bar{a})\longleftrightarrow\varphi(\bar{x},\sigma(\bar{a}))]$) とき $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と同等な $L(A)$-論理式があることを示せ．（ヒント：$\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と同等な $L(A)$-論理式がなかったとする．$\Psi(\bar{x})$ を $\mathcal{M}\models\psi(\bar{x})\to\varphi(\bar{x},\bar{a})$ が成立する $L(A)$-論理式 $\psi(\bar{x})$ 全体の集合とする．$\sum(\bar{x})$ を $\{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x})\in\Psi\}\cup\{\varphi(\bar{x},\bar{a})\}$とすれば，この集合は充足的である．$\bar{d}$ を $\sum(\bar{x})$ の解とすれば，$\bar{d}$ と $A$ 上で同じタイプを持つ $\bar{e}$ で $\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})$ を満たすものが存在する．このとき，$\sigma|A=\mathrm{id}_A$，$\sigma(\bar{d})=\bar{e}$ なる基本写像は明らかに $\varphi$ を動かす．）

**問題122**　$p(\bar{x})\in\mathrm{S}(A)$ を定格的なタイプとし，$\{\bar{a},\bar{b}\}$をその Morley 列とする．$\varphi(\bar{y},\bar{x})\in L$ に対して，

$$\mathcal{M}\models\forall\bar{y}[\varphi(\bar{y},\bar{a})\longleftrightarrow\varphi(\bar{y},\bar{b})]$$

ならば，（実質的に）$\varphi(\bar{y},\bar{a})\in L(A)$ である．（ヒント：問題121により，$\varphi(\bar{y},\bar{a})$ が $A$ 上のどんな基本写像 $f$ でも動かないことを示せばよい．$\bar{b}$ を $p|(A\cup\bar{a}\cup f(\bar{a}))$ の解となるように動かす．仮定により，$\forall\bar{y}[\varphi(\bar{y},\bar{a})\longleftrightarrow\varphi(\bar{y},\bar{b})]$ と $\forall\bar{y}[\varphi(\bar{y},f(\bar{a}))\longleftrightarrow\varphi(\bar{y},\bar{b})]$ が成立する．したがって，$\forall\bar{y}[\varphi(\bar{y},\bar{a})\longleftrightarrow\varphi(\bar{y},f(\bar{a}))]$ を得る．）

**命題123**　$\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L(M)$に対して，$\varphi(\bar{x},\bar{b})$が $M$ 上分岐しているとする．$\{\bar{b}_i : i<\omega\}$ を $\mathrm{tp}(\bar{b}/M)$ の Morley 列とすれば，$\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i<\omega\}$は充足的でない．

**証明**：各$\varphi(\bar{x},\bar{b}_i)$ はすべて $M$ 上分岐している．$\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i<\omega\}$が解を持ったとして矛盾を導く．

**主張**　任意の $K\subset\omega$ に対して，$\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i\in K\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i\in\omega-K\}$は解を持つ．

**主張の証明**：解を持たないような $K\subset\omega$ があったとする．コンパクト性と $\{\bar{b}_i : i\in\omega\}$ の一様性（定理119）から，適当な $k\in\omega$ に対して，$K_n=\{k\cdot n+l : l=0,\cdots,k-1\}$ とおくと，

$$\mathcal{M}\models \forall\bar{x}[\bigwedge_{i\in K_n}\varphi(\bar{x},\bar{b}_i)\rightarrow\bigvee_{i\in K_m}\varphi(\bar{x},\bar{b}_i)] \quad (n\neq m)$$

が成立する．したがって再び一様性により，次も成立する．

$$\mathcal{M}\models \forall x[\bigvee_{n=1}^{k}\bigwedge_{i\in K_n}\varphi(\bar{x},\bar{b}_i)\longleftrightarrow\bigvee_{n=k+1}^{2k}\bigwedge_{i\in K_n}\varphi(\bar{x},\bar{b}_i)].$$

左辺，右辺ともにパラメーターだけが異なる同じ形の論理式である．また左辺に含まれるパラメーターと右辺に含まれるパラメーターは独立である．したがって（上の問題から），論理式 $\theta(\bar{x})=\bigvee_{n=1}^{k}\bigwedge_{i\in K_n}\varphi(\bar{x},\bar{b}_i)$ は実は $M$ 上の論理式であり，仮定から充足的でもある．したがって，$\theta$ は $M$ に解を持たなければならない．しかし $\theta(\bar{x})$ は $M$ 上分岐する論理式を $\vee$ で結んだものだから，$M$ 上で分岐しなければならない．これは矛盾である．　□

Morley 列$\{\bar{b}_i : i\in\omega\}$ を延長して，$\{\bar{b}_i : i\in\kappa\}$ を作る．一様性と主張により，各 $K\subset\kappa$ に対して，$\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i\in K\}\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i\in\kappa-K\}$ は充足的．したがって，タイプ $q_K\in S(\mathrm{dom}\varphi\cup\{\bar{b}_i : i\in\kappa\})$ に拡大できる．$q_K$ たちは互いに異なるタイプである．したがって，$|S(\mathrm{dom}\varphi\cup\{\bar{b}_i : i\in\kappa\})|>\kappa$．$\kappa$ は任意だから，このことは $T$ が安定でないことを示す．　□

分岐という言葉を使ったのは次の系があるからである．

**系124**　$\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L(A)$ に対して，$\varphi(\bar{x},\bar{b})$ が $A$ 上分岐しているとする．任意の $\kappa\geq\omega$ に対して，次の条件を満たす $A$ 上の一様集合 $I=\{\bar{b}_i : i<\kappa\}$がある．

1．$\bar{b}_0=\bar{b}$；

2．$\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i<\kappa\}$は充足的でない．

（一様性から，どんな $n$ 個の元を持つ部分集合も充足的でないような $n<\omega$ が存在する．）

**証明**：$M\downarrow_A\bar{b}$ となるように $M\supset A$ を選ぶ．$I$ を $\mathrm{tp}(\bar{b}/M)$ の Morley 列とする．$M$

は $L(A\cup\bar{b})$-論理式を最も少なく充足するモデルである．$\varphi(\bar{x},\bar{b})$ は $A$ 上分岐しているから，$\varphi(\bar{x},\bar{b})$ は $M$ に解を持たない．このことは $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ が $M$ 上分岐していることを意味する．したがって命題123を使って結論を得ることができる．　□

**定義125（分岐列の長さ）**

1．タイプの拡大列 $S=\{p_i(\bar{x}) : i<\alpha\}$ において，各 $i<\alpha$ で $p_i \subset_{\mathrm{f}} p_{i+1}$ が成り立つとき，$S$ は長さ $\alpha$ の分岐拡大列であるという；

2．$\varkappa(T)=\sup\{|\alpha|^{+} :$ 長さ $\alpha$ の分岐拡大列が存在する$\}$，したがって長さ $\varkappa(T)$ のタイプの分岐拡大列は存在しない（定理128参照）．

**問題126**　$\varkappa(T)\geq\omega$ を示せ．（ヒント：$n$-変数タイプで $n$ 回分岐するものが存在する．）

**補題127**　長さ $\varkappa\geq\omega$ のタイプの分岐拡大列があれば，任意の $\lambda$ に対して，$|B|\leq\lambda^{<\varkappa}$，$|\mathrm{S}(B)|\geq\lambda^{\varkappa}$ となる $B$ が存在する．

**証明**：$\{p_i(\bar{x}) : i<\varkappa\}$をタイプの分岐拡大列とする．タイプが分岐するときは，その分岐する原因となる論理式が存在する．したがって，$p_i$ たちは，

- $p_i=\mathrm{tp}(\bar{d}/A_i)$；
- $A_{i+1}=A_i\cup\bar{a}_{i+1}$；
- $A_i=\bigcup_{j<i}A_j$（$i$：極限順序数）

の形だと仮定できる．

**第1段階．** $A=\bigcup_{i<\varkappa}A_i$ とする．上昇列$\{B_i\}_{i<\varkappa}$，$B_i\supset A_i$，$|B_i|\leq\varkappa+\lambda$ を 以下の条件を満すように帰納的に作って行く．各 $i<\varkappa$ に対して，

$1_i$．$B_i \downarrow_{A_i} \bar{d}\cup A$；

$2_i$．$\{\mathrm{tp}(\bar{d}/A_j\cup B_i) : i\leq j<\varkappa\}$は分岐拡大列．ただしこれは $1_i$ に補題107を使って導かれる；

$3_i$．$i=k+1$ のとき，$\mathrm{tp}(\bar{d}/B_i)$ の $B_k$ 上のコピー $\{q_{i,j} : j<\lambda\}\subset\mathrm{S}(B_i)$ で互いに異なるものが存在する．（したがって任意の二つに共通解はない．）

$i$ 未満の構成が終わったとする．$i$ が極限順序数のときは単に $B_i=\bigcup_{j<i}B_j$ とすれ

ば，非分岐拡大の推移性により $1_i$（したがって $2_i$）が成立する．$i=k+1$ とする．$B_k$ までできたときに $B_i$ を作る．$\mathrm{tp}(\bar{d}/\bar{a}_i \cup B_k)$ は $B_k$ 上分岐しているので，系124により $B_k$ 上の適当な一様集合 $I=\{\bar{b}_j : j<\lambda+\aleph_0\}$，$\bar{b}_0=\bar{a}_i$ で

$$\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_j) : j<\lambda+\aleph_0\} \text{の無限部分集合は常に充足的でない} \tag{5.1}$$

ものが存在する．ただし $\varphi(\bar{x}, \bar{b}_0)$ は $\mathrm{tp}(\bar{d}/\bar{a}_i \cup B_k)$ が $B_k$ 上分岐している原因の論理式とする．また $I\downarrow_{A_i \cup B_k}\bar{d}\cup A$ と仮定してよい．$B_i=B_k \cup I$ と定義すれば，$1_k$ と推移性により $1_i$ が満たされる．各 $j<\lambda$ に対して，$(B_i-\{\bar{b}_0,\ \bar{b}_j\})$-基本写像 $f_j$ を $\bar{b}_0$ と $\bar{b}_j$ を交換するように選ぶ．$\mathrm{tp}(\bar{d}/B_{i+1})$ を $f_j$ で動かしたタイプを $q_{i+1,j}$ とすれば，それらは $\mathrm{S}(B_{i+1})$ に属し，5.1 によって，各 $q_{i+1,j}$ に対して，それと一致する $q_{i+1,k}$ の個数は有限個．したがって，番号をつけなおすことにより，$q_{i+1,j}$ $(j<\lambda)$ たちはすべて異なるとしてよい．これで条件 4 が満足される．$|B_i| \leq \kappa+\lambda$ もよい．

**第 2 段階．** $i<\kappa$ に対して，$q_i(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{d}/B_i)$ とする．各 $\eta \in {}^{\kappa>}\lambda$ に対して，$q_{\mathrm{lh}(\eta)}$ のコピー $q_\eta$ を次が成立するように帰納的に定義してゆく：

5．$q_\eta \subset q_{\eta'}$ $(\eta \subset \eta')$ ；

6．$q_{\eta^\frown j}$ $(j<\lambda)$ は互いに共通解を持たない．

$i=\mathrm{lh}(\eta)$ が極限順序数のときは $q_\eta=\bigcup_{j<i} q_{\eta|j}$ とする．$q_\eta$ ができたとき，$q_{\eta^\frown j}$ $(j<\lambda)$ たちを作ればよい．しかし $q_\eta$ は $q_{\mathrm{lh}(\eta)}$ のコピーだから，条件 4 により，条件 6 を満たす $q_{\eta^\frown j}$ $(j<\lambda)$ が存在することがわかる．

**第 3 段階．** $B=\bigcup_{\eta \in {}^{\kappa>}\lambda} \mathrm{dom}(q_\eta)$ とすれば，$|B| \leq \lambda^{<\kappa} \cdot (\kappa+\lambda) \leq \lambda^{<\kappa}$ である．また各 $\nu \in {}^{\kappa}\lambda$ に対して，$q_\nu=$「$\bigcup_{i<\kappa} q_{\nu|i}$ の $\mathrm{S}(B)$ への拡大」とすれば，$q_\nu$ たちは第 2 段階の条件からすべて異なり，全部で $\lambda^\kappa$ 個だけある．　□

**定理128**　$\kappa(T) \leq \aleph_1$．（$L$ が可算なことによる．一般には $\kappa(T) \leq |T|^+$．）

**証明**：タイプの分岐拡大列 $\{p_i(\bar{x}) : i<\aleph_1\}$ の存在を仮定して矛盾を導く．番号の付け変えにより，$p_{i+1} \supset_{\mathrm{f}} p_i$ の原因となる論理式は，$i$ によらずすべて同じ形 $\varphi(\bar{x}, \bar{a}_{i+1})$ をしているとしてよい．（$L$ が可算なことを使い，必要な $p_i$ たちだけを

抜き出す.）$\varkappa$ を任意の無限基数とする．1変数述語記号 $U_i$ $(i<\varkappa)$ と定数記号（の有限列）$\bar{c}_i$ $(i<\varkappa)$ および $\bar{c}$ を用意して，

1．$U_i$ はモデル；

2．$\bar{c}_j \in U_i$ $(\forall j \leq i)$；

3．$\varphi(\bar{x}, \bar{c}_{i+1})$ は $U_i$ 上分岐する（$\varphi(\bar{x}, \bar{c}_{i+1})$ は $U_i$ に解を持たない）；

4．$\{\varphi(\bar{x}, \bar{c}_i) : i<\varkappa\}$は解 $\bar{c}$ を持つ．

なる論理式の集合を考える．明らかにこの集合は充足的である．$\bar{c}$ の解を $\bar{d}$，$\bar{c}_i$ の解を $\bar{d}_i$ とすれば条件1-3により，$q_i(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{d}/\{\bar{d}_j : j<i\})$ $(i<\varkappa)$ は長さ $\varkappa$ の分岐拡大列となる．与えられた無限基数 $\mu$ に対して，$\varkappa$ を $2^{\varkappa}>\mu$ となる最小の基数とする．$\lambda=2$ として，補題127を適用すれば，濃度 $2^{<\varkappa} \leq \mu$ の集合 $B$ 上に $2^{\varkappa}>\mu$ 個の異なるタイプが存在する．すなわち $T$ は $\mu$-安定でない．$\mu$ は任意だから，$T$ が安定でないことになり，矛盾を得る．　□

**系129**　どんなタイプ $p(\bar{x})$ に対しても，濃度が $\varkappa(T)$ 未満の $A \subset \mathrm{dom}(p)$ をとって $p$ が $A$ 上非分岐にすることができる．したがって $p(\bar{x})$ の $\mathcal{M}$ 上への非分岐拡大は $2^{\aleph_0}$ 個以下である．

**証明：前半．** どんな$A \subset \mathrm{dom}(p)$，$|A|<\varkappa(T)$ に対しても $p \supset_{\mathrm{f}} p|A$ とする．$\mathrm{dom}(p)$ の濃度 $\varkappa(T)$ 未満の部分集合の上昇列$\{A_i : i<\varkappa(T)\}$を以下のように定義：$A_i$ がまで定義されたとき，仮定から $p \supset_{\mathrm{f}} p|A_i$ である．分岐の有限性から $A_{i+1} \supset A_i$, $|A_{i+1}-A_i|<\omega$ を $p|A_{i+1} \supset_{\mathrm{f}} p|A_i$ となるように選べる．また $\delta$ が極限数のときは $A_\delta = \bigcup_{i<\delta} A_i$ とする．このとき，$\{p|A_i : i<\varkappa(T)\}$は長さ $\varkappa(T)$ の分岐拡大列となり矛盾．

**後半．** $p \supset_{\mathrm{nf}} p|A_0$ となる可算集合 $A_0 \subset A$ をとり，$S^* = \{q \in \mathrm{S}(\mathcal{M}) : q \supset_{\mathrm{nf}} p|A_0\}$とする．推移性により，$p$ の $\mathcal{M}$ への非分岐拡大は $S^*$ に属する．したがって，$|S^*| \leq 2^{\aleph_0}$ を示せばよい．$M \supset A_0$ を可算モデルとすれば，$q \in S^*$ は $q \supset_{\mathrm{nf}} q|M$ を満たす．ところがモデル上のタイプは定格的（定理113）．したがって$|S^*| \leq |\mathrm{S}(M)|$．また可算モデル上のタイプは高々 $2^{\aleph_0}$ 個，したがって$|S^*| \leq 2^{\aleph_0}$ となる．　□

**問題130**　$L$ が必ずしも可算でないとき，$p(\bar{x})$ の $\mathcal{M}$ への非分岐拡大の個数は $2^{|T|}$ で抑えられることを示せ．

**定理131（超安定性の特徴づけ）**　$T$ が超安定 $\Longleftrightarrow \kappa(T)=\aleph_0$.

**証明：**$\Rightarrow$．$\lambda$ として $\mathrm{cf}(\lambda)=\aleph_0$ となる基数を考える．このような基数は $\lambda^{\aleph_0}>\lambda$ を満たす．またこのような $\lambda$ は任意に大きくとれる．したがって $T$ は $\lambda$-安定と仮定できる．いま長さ $\omega$ の分岐拡大列があったとすれば，補題127により，濃度 $\lambda$ の集合の上に，$\lambda^{\aleph_0}$ 個の異なるタイプができてしまう．これは $\lambda$-安定性に反する．
$\Leftarrow$．$\lambda\geq 2^{\aleph_0}$ として，$|M|=\lambda$ とする．$p\in \mathrm{S}(M)$ に対して，有限集合 $A\subset M$ を $p$ が $A$ 上非分岐となるようにとれる（系129）．したがって $\mathrm{S_{nf}}(A)=\{p\in \mathrm{S}(M)：p$ は $A$ 上非分岐$\}$とすれば，

$$\mathrm{S}(M)=\bigcup\{\mathrm{S_{nf}}(A)：A\subset M \text{ は有限}\}.$$

有限な $A\subset M$ の取り方は $\lambda$ 個，また$|\mathrm{S}(A)|\leq 2^{\aleph_0}\leq\lambda$ で各タイプの非分岐拡大は $2^{\aleph_0}(\leq\lambda)$ 個しかないから，$|\mathrm{S_{nf}}(A)|\leq\lambda\times\lambda=\lambda$．よって$|\mathrm{S}(M)|\leq\lambda$．したがって，$T$ は $\lambda$ で安定である．　□

**問題132**　$T$ が $\lambda^{\aleph_0}>\lambda$ を満たす $\lambda$ で安定ならば，$T$ は超安定である（ヒント：上の定理と補題127を使えばよい）．

次の補題は技術的にとても重要である．

**補題133**　$I=\{\bar{a}_i：i<\kappa\}$を $A$ 上独立な集合とする．このとき有限列 $\bar{b}$ と $A$ 上従属的となる $I$ の元は高々可算個である．また $T$ が超安定のときは有限個である．

**証明：**もし$\{\bar{a}_i：i<\aleph_1\}$の各元と従属的な $\bar{b}$ が存在したとする．このとき，$p_j=\mathrm{tp}(\bar{b}/\{\bar{a}_i：i<j\})$ とすれば，これは長さ $\aleph_1$ の分岐拡大列になってしまう．超安定の場合は定理131を使えばよい．　□

**問題134**　$I=\{\bar{a}_i：i<\kappa\}$ を $A$ 上独立な集合で各 $\bar{a}_i$ は $B$ と $A$ 上従属になっているとする．このとき，$\kappa\leq|B|+\aleph_0$ である．（ヒント：$B$ のすべての有限部分集合を並べて，$\bar{b}_i$ $(i<|B|+\aleph_0)$ とする．$I_i=\{\bar{a}_j：\bar{a}_j \not\downarrow_A \bar{b}_i\}$ とすれば，これは高々可算

である．また $I=\bigcup_{i<|B|+\aleph_0} I_i$ が成立している．）

すべてのタイプ $p$ はその定義域 $\mathrm{dom}(p)$ 上で定義可能であったが，さらに次が成り立つ．

**定理135（定格タイプの定義可能性）**　$p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ を定格タイプとすれば，$p|\mathcal{M}$ は $A$ 上定義可能である．

**証明：** $\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L$ とする．$I=\{\bar{a}_i : i<\aleph_1\}$ を $p$ の Morley 列とする．まず次の主張を示そう．

**主張**　$\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L$ と $\bar{b}$ に対して，$n_\varphi$ を補題116で選んだ数とすれば，

$$\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p|\mathcal{M} \Longleftrightarrow |\{i<\omega : \mathcal{M}\models \neg\varphi(\bar{a}_i,\bar{b})\}|<n_\varphi.$$

**主張の証明：** ⇒．対偶を示す．$|\{i<\omega : \mathcal{M}\models \neg\varphi(\bar{a}_i,\bar{b})\}|<n_\varphi$ でないとすれば，補題116により，$\mathcal{M}\models\neg\varphi(\bar{a}_i,\bar{b})$ となる $i$ が非可算個ある．このとき補題133により，そのような $i$ の中から，$\bar{a}_i \downarrow_A \bar{b}$ となるものが選べる．$\mathrm{tp}(\bar{a}_i/A\cup\bar{b})=p|(A\cup\bar{b})$ なので，$\neg\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p|(A\cup\bar{b})$ を得る．

⇐．$|\{i<\omega : \mathcal{M}\models \neg\varphi(\bar{a}_i,\bar{b})\}|<n_\varphi$ とすれば，$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}_i,\bar{b})$ となる $i$ が非可算個．したがって，上と同様に $\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p|(A\cup\bar{b})$ を得る．　□

結局，次が得られたことになる：

$$\begin{aligned}&\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p|\mathcal{M}\\ \Longleftrightarrow\ & |\{i<\omega : \mathcal{M}\models \neg\varphi(\bar{a}_i,\bar{b})\}|<n_\varphi\\ \Longleftrightarrow\ & |\{i<\omega : \mathcal{M}\models \varphi(\bar{a}_i,\bar{b})\}|\geq n_\varphi.\end{aligned}$$

したがって $\bar{a}_i$ $(i\leq 2\cdot n_\varphi)$ をパラメータとして使った論理式 $\theta$ を，$\theta(\bar{y})=$「$|\{i\leq 2\cdot n_\varphi : \varphi(\bar{a}_i,\bar{y})\}|\geq n_\varphi$」で定義すれば，

$$\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p|\mathcal{M} \Longleftrightarrow \mathcal{M}\models\theta(\bar{b}).$$

を得る．$p$ が定格的なことから $\theta$ は $A$-基本写像で不変．したがって実は $\theta\in L(A)$ とできる（問題121参照）．　□

## 5.2 強タイプ

**定義136**

1．論理式 $E(\bar{x},\bar{y})\in L(A)$ が $\mathcal{M}$ 上に同値関係を定義しているとは，

$\mathcal{M}\models\forall\bar{x}E(\bar{x},\bar{x})$；

$\mathcal{M}\models\forall\bar{x}\forall\bar{y}[E(\bar{x},\bar{y})\rightarrow E(\bar{y},\bar{x})]$；

$\mathcal{M}\models\forall x\forall\bar{y}\forall z[E(\bar{x},\bar{y})\wedge E(\bar{y},\bar{z})\rightarrow E(\bar{x},\bar{z})]$

が成立することである．このとき，$\mathrm{n}(E)$ で $E$ の同値類の個数を表す．$\mathrm{n}(E)<\omega$ となる同値関係 $E(\bar{x},\bar{y})\in L(A)$ の全体を $\mathrm{FE}(A)$ で表す．

2．$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)=\{E(\bar{x},\bar{a}):E(\bar{x},\bar{y})\in\mathrm{FE}(A)\}$．$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ を $\bar{a}$ の $A$ 上の強タイプ（strong type）という．

3．$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)=\mathrm{stp}(\bar{b}/A)\Longleftrightarrow\mathcal{M}\models E(\bar{a},\bar{b})$ $({}^{\forall}E(\bar{x},\bar{y})\in\mathrm{FE}(A))$

**注意137**　$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ は $L(A\cup\bar{a})$-論理式の集合，また $\mathrm{stp}(\bar{b}/A)$ は $L(A\cup\bar{b})$-論理式の集合である．したがって，上の定義の3の左辺は，本来は $\mathrm{stp}(\bar{a}/A)\equiv\mathrm{stp}(\bar{b}/A)$ とでもかくべきである．しかし記号が増えて煩雑になるのを避けるため＝で代用しておく．

**命題138（強タイプという名前の妥当性）**

$$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)=\mathrm{stp}(\bar{b}/A)\ \Rightarrow\ \mathrm{tp}(\bar{a}/A)=\mathrm{tp}(\bar{b}/A).$$

**証明**：$\varphi(\bar{x})\in L(A)$ とする．「$\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\varphi(\bar{y})$」$\in\mathrm{FE}(A)$ である（$\mathrm{n}(E)=2$）．したがって，$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)=\mathrm{stp}(\bar{b}/A)$ ならば，$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a})\leftrightarrow\varphi(\bar{b})$．$\varphi$ は任意だから $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)=\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$．　□

**命題139**　$\mathrm{tp}(\bar{a}/M)=\mathrm{tp}(\bar{b}/M)\ \Rightarrow\ \mathrm{stp}(\bar{a}/M)=\mathrm{stp}(\bar{b}/M)$．

**証明**：$E(\bar{x},\bar{y})\in\mathrm{FE}(M)$ として，$n=\mathrm{n}(E)<\omega$ とすれば，論理式

$$\exists x_1\ldots x_n\ [x_i\text{ たちは }E\text{ の異なる同値類の代表元}]$$

が $\mathcal{M}$ で成立．したがって $M\prec\mathcal{M}$ においても成立．よって代表元 $a_1,\ldots,a_n$ たち

は $M$ の中から取ることができる．$E(\bar{a},\bar{a}_i)$ としよう．$E(\bar{x},\bar{a}_i)\in L(M)$ だから $\bar{a}$ と $\bar{b}$ のタイプが等しいことにより，$E(\bar{b},\bar{a}_i)$ が成立．$E$ の推移性から $E(\bar{a},\bar{b})$ である．　□

**問題140**　$E(\bar{x},\bar{y})\in \mathrm{FE}(A)$ のとき，論理式 $E(\bar{x},\bar{a})$ は $A$ 上分岐しないことを示せ．（ヒント：勝手なモデル $M\supset A$ の中に $E$ の同値類の代表元が存在する．したがって $\bar{a}$ と同じクラスに属する $\bar{b}\in M$ が存在する．）

**問題141**　勝手な $B\supset A\cup\bar{a}$ に対して，$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ を拡大した $p(\bar{x})\in \mathrm{S}(B)$ で $A$ 上非分岐なものが存在する．（ヒント：前半は問題140そのままである．後半は $A$ 上非分岐な集合はタイプに拡大できることによる．）

**補題142**　$\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ が $A(\subset B)$ 上分岐しなければ，$\mathrm{stp}(\bar{a}/B)$ も $A$ 上分岐しない．

**証明**：$\mathrm{stp}(\bar{a}/B)$ は $B$ 上分岐しない．（上の問題参照．）したがってこれを拡大した $q\in \mathrm{S}(B\cup\bar{a})$ で $B$ 上分岐しないものがある．推移性により，$q$ は $A$ 上分岐しない．したがって，$q$ の部分である $\mathrm{stp}(\bar{a}/B)$ も $A$ 上分岐しない．　□

**問題143**　$I$ を $A$ 上の無限な一様集合とする．勝手な $\bar{a}$，$\bar{b}\in I$ に対して，$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)=\mathrm{stp}(\bar{b}/A)$ が成立することを示せ．（ヒント：もし $E\in \mathrm{FE}(A)$ に対して，$\mathcal{M}\models\neg E(\bar{a},\bar{b})$ とすれば，一様性からすべての元が $E$ の異なる同値類に属することになる．よって $\mathrm{n}(E)\geq\omega$ となり矛盾である．）

**定理144（有限同値関係の定理）**　$p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ が異なる非分岐拡大 $p_i(\bar{x})\in \mathrm{S}(B)$ $(i=1,2)$ を持てば，$p_1$ と $p_2$ は $\mathrm{FE}(A)$ によって区別される：すなわち，$E(\bar{x},\bar{x}')\in \mathrm{FE}(A)$ を上手に選べば，任意の $p_1$ の解 $\bar{a}_1$ と任意の $p_2$ の解 $\bar{a}_2$ に対して，$\mathcal{M}\models\neg E(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ が成立する．

**補題145**　$q(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$，$\varphi(\bar{x},\bar{u})\in L$ に対して，$S=\{q^*|\varphi : q^*\in \mathrm{S}(\mathcal{M}), q^*\supset_{\mathrm{nf}}q\}$ とおく．このとき $S$ は有限集合である．

**補題の証明**：$S$ が無限集合として矛盾を導く．$\bar{d}$ を $q$ の解として，$N$ を $N{\downarrow_A}\bar{d}$ となるようにとる．このとき $N$ は $L(A\cup\bar{d})$-論理式を最も少なく充足するモデルである．$N$ 上に $q$ の無限個の非分岐拡大 $q_i$ $(i=1,2,\cdots)$，$q_i|\varphi\neq q_j|\varphi$ $(i\neq j)$ が存

在すると仮定してよい．一変数述語記号 $U(\bar{x})$ と $\varkappa$ 個の変数$\{\bar{x}_i : i<\varkappa\}$を用意して，論理式の集合 $\sum(U,\{\bar{x}_i : i<\varkappa\})$：

1． $U \succ N$；

2． $q(\bar{x}_i)\ (i<\varkappa)$；

3． $\{\exists \bar{u}\in U[\varphi(\bar{x}_i,\bar{u}) \nleftrightarrow \varphi(\bar{x}_j,u)] : i,j<\varkappa, i\neq j\}$；

4． $\{\neg\exists \bar{u}\in U[\psi(\bar{x}_i,\bar{u})] : i<\varkappa, \mathcal{M}\models\neg\psi(\bar{d},\bar{b})\ (^\forall\bar{b}\in N)\}$；

を考える．上の集合 $\sum$ が有限充足的になることを示そう．このために $\sum$ を有限個の変数 $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k$ と $U$ に関連した部分に制限した $\sum_k(U,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k)$ が充足的なことを示そう．$q_i$ の解 $\bar{d}_i$ $(i=1,\cdots,k)$をとる．$U$ に $N$ を代入して，$\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k$ に $\bar{d}_1,\ldots,\bar{d}_k$ を代入すれば，$\sum_k$ が満たされる．(注意105参照.) よって，$\sum(U,\{\bar{x}_i : i<\varkappa\})$ 全体の解 $N'$，$\{\bar{e}_i : i<\varkappa\}$がある．条件 1-3 によって，$\mathrm{tp}(\bar{e}_i/N')$ $(i<\varkappa)$ たちは $q$ の異なる拡大になっている．また条件 4 によりそれらは非分岐拡大である．このことは $\mathrm{tp}(d_i/N')$ が $q(\bar{x})$ の $\varkappa$ 個の相異なる非分岐拡大になっていることを意味する．$\varkappa>2^{\aleph_0}$ とすれば系129に矛盾する． □

**定理の証明**：$p_1\neq p_2$ を実現している論理式を選ぶ．すなわち $\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L$ と $\bar{b}\in B$ を $\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p_1$，$\neg\varphi(\bar{x},\bar{b})\in p_2$ となるようにとっておく．$q(\bar{y})=\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ を考える．$\varphi^*(\bar{y},\bar{x})$ を論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ とすると，補題145により，$q(\bar{y})$ の $\mathcal{M}$ への非分岐拡大は $\varphi^*$-タイプに制限すれば有限個しかない．それらを $q_1|\varphi^*,\cdots,q_n|\varphi^*$ としておく．各 $q_i$ は定義可能だから，

$$\varphi^*(\bar{y},\bar{d})\in q_i \iff \mathcal{M}\models\theta_i(\bar{d})\ \ (^\forall\bar{d}\in\mathcal{M})$$

となる論理式 $\theta_i(y)\in L(\mathcal{M})$ がある．$E(\bar{x},\bar{x}')\in\mathrm{FE}(\mathcal{M})$ を，

$$E(\bar{x},\bar{x}') = \bigwedge_{i=1}^{n}[\theta_i(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_i(\bar{x}')]$$

とする．$\mathrm{n}(E)\leq 2^n$ である．勝手な $A$-基本写像 $f$ を$\{q_1|\varphi^*,\cdots,q_n|\varphi^*\}$に作用[†]

[†] $f(r(\bar{x}))=\{\psi(\bar{x},f(\bar{d})) : \psi(\bar{x},\bar{d})\in r(\bar{x})\}$なる作用を考えている．

させるとき，それは並べかえをするだけだから，論理式 $E(\bar{x},\bar{x}')$ は $f$ によって不変．よって $E\in\mathrm{FE}(A)$ である．次の主張を示せば証明が完了する．

**主張**　任意の $p_1$ の解 $\bar{a}_1$ と任意の $p_2$ の解 $\bar{a}_2$ に対して，$\mathcal{M}\models\neg E(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$．

まず $\bar{a}_1$ と $\bar{a}_2$ が $B$ 上独立の場合を考えよう．$\bar{a}_1$ と $B$ は $A$ 上独立だから，$B\downarrow_A \bar{a}_1\cup\bar{a}_2$ である．また $\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}_1,\bar{b})\wedge\neg\varphi(\bar{a}_2,\bar{b})$ だから，$\mathcal{M}\models\neg E(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ である．次に一般の位置にある $\bar{a}_1$，$\bar{a}_2$ の場合を考える．$p_1\cup\{E(\bar{x},\bar{a}_1)\}$の拡大 $p^*\in\mathrm{S}(M)$ $(M\supset B\cup\bar{a}_1\cup\bar{a}_2)$ で $A$ 上非分岐なものを選ぶ．（問題141参照．）$p^*$ の解を $\bar{a}_1'$ とすれば，$\bar{a}_1'\downarrow_B\bar{a}_2$ でさらに $\mathcal{M}\models E(\bar{a}_1',\bar{a}_1)$ である．一方最初の場合分けの結果から $\mathcal{M}\models\neg E(\bar{a}_1',\bar{a}_2)$ である．したがって，$\mathcal{M}\models\neg E(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ を得る．　□

**系146**　$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が $\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ を生成していれば，定格的である．

**注意147**　$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ は $L(A\cup\bar{a})$ の論理式の集合だが完全ではない．したがって本来の意味ではタイプではない．しかし $\mathrm{S}(A\cup\bar{a})$ に唯一の非分岐拡大を持ちそれは $A$ 上非分岐になっている．このことから $A$ 上のタイプと思っても差し支えない場合も多い．例えば $\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ の Morley 列という言い方も用いる．

# 第6章　安定性の強さとランクの存在

ランクは論理式（またはタイプ）に対して順序数を対応させる関数である．ランクが高いほどその論理式の解集合の複雑さが増す．ランクにはいろいろな種類(Morley ランク，U-ランク，$(\varphi,\omega)$-ランクなど）があり，それらのランクの存在と安定性の強さの間には密接な関係がある．実際次の関係がある：

1．$T$ が $\aleph_0$-安定であることと Morley ランクの存在は同値；

2．$T$ が超安定であることと U-ランクの存在は同値；

3．$T$ が安定であることと $(\varphi,\omega)$-ランクの存在は同値．

また，これらの rank に関しては，$p \subset q$ で各 $p, q$ がランクを持つとき，

4．$p \subset_{\mathrm{nf}} q \iff \mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(q)$

が成立している．安定性の基本定理（定理87）で，$T$ が安定なことと $(\varphi,2)$-ランクを持つこと（$\omega$ にならないこと）が同値なことが既に示されている．しかし $(\varphi,2)$-ランクでは，条件 4 が成立しない．そこで条件 4 が成立するランクとして，$(\varphi,\omega)$-ランクを導入する．

## 6.1　代数的な論理式とタイプ

まず最初にタイプが代数的という概念を導入する．我々のランクでは，タイプ（論理式）が代数的なこととランクが 0 になることが同値になる．

**定義148**

1．タイプ $p(\bar{x})$ が代数的 (algebraic) $\iff$ $p$ の $\mathcal{M}$ での解は有限個；

2．$\bar{a}$ が $A$ 上代数的 $\iff$ $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が代数的；

3．$B$ が $A$ 上代数的 $\iff$ $B$ の各元 $a$ が $A$ 上代数的；

4．$\mathrm{acl}(A)$ = 「$A$ 上代数的な元全体の集合」．

体において代数方程式の解が有限個しかないことに注目して，代数的という概念

を逆に定義したわけである.

**問題149**　有限列 $\bar{a}=a_1,\ldots,a_n$ に対して,「$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ 代数的 $\Longleftrightarrow$ 各 $\mathrm{tp}(a_i/A)$ が代数的」である. これを示せ.

**命題150**　$\bar{a}\in\mathrm{acl}(A)$ ならば, $L(A)$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ で次の条件を満たすものがある:

1. $\bar{a}$ は $\varphi(\bar{x})$ の解である.
2. $\varphi(\bar{x})$ の解は有限個である.

**証明**: $p(\bar{x})$ を $\bar{a}$ の $A$ 上のタイプとする. $p$ の解の数を $n<\omega$ とすれば, このとき

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n+1} p(\bar{x}_i)\cup\{\bar{x}_i\neq\bar{x}_j : 1\leq i<j\leq n+1\}$$

は解を持たない. したがってコンパクト性（定理25）により, その有限部分で解を持たないものがあるので, $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\in p$ が存在して,

$$\bigwedge_{j=1,\ldots,m}\varphi_i(\bar{x}_i)\rightarrow\bigvee_{1\leq i\neq j\leq n}\bar{x}_i=\bar{x}_j$$

が成立する. これは $\varphi(\bar{x})=\bigwedge_{i=1,\ldots,m}\varphi_i(\bar{x})\in p$ が $n$ 個しか解がないことを示している. □

上の命題150から, $\bar{a}\in\mathrm{acl}(A)$ なら $\bar{a}\in\mathrm{acl}(A_0)$ となる有限集合 $A_0\subset A$ が存在することがわかる.

**命題151**　$\mathrm{acl}(*)$ は閉包 (closure) としての性質を持つ. すなわち,

1. $A\subset\mathrm{acl}(A)$;
2. $A\subset B\Rightarrow\mathrm{acl}(A)\subset\mathrm{acl}(B)$
3. $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))=\mathrm{acl}(A)$.

**証明**: 1, 2は明らか. 3の $\supset$ は1, 2よりすぐわかる.

3の $\subset$ を示せばよい. $a\in\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$ のとき, $a\in\mathrm{acl}(\bar{b})$ となる $\bar{b}\in\mathrm{acl}(A)$ がとれる. $\varphi(x,\bar{b})$ を $a$ によって満たされる論理式で $\forall\bar{y}\exists^{\leq m}x\varphi(x,\bar{y})$[†] が成立する論

[†] $\exists^{\leq m}x\varphi(x,\bar{y})$ は $\forall x_1,\ldots,x_{m+1}[\bigwedge_{i=1,\ldots,m+1}\varphi(x_i,\bar{y})\rightarrow\bigvee_{i\neq j}x_i=x_j]$ の省略形である.

理式とし，$\psi(\bar{y})\in L(A)$ を $\bar{b}$ によって満たされ $\exists^{\leq n}\bar{y}\psi(\bar{y})$ が成立するものとする．このとき，$\exists\bar{y}[\varphi(x,\bar{y})\wedge\psi(\bar{y})]$ は $\bar{a}$ によってみたされ，高々 $m\cdot n$ 個の解しか持たない論理式となる．（$\psi(\bar{y})$ の解は高々 $n$ 個で，しかも $\psi$ の任意の解 $\bar{b}'$ に対して，$\varphi(x,\bar{b}')$ の解が $m$ 個である．）したがって $a\in\mathrm{acl}(A)$ となる．

## 6.2 $\aleph_0$-安定性と Morley ランク

**定義152** (Morley ランク)

1．Morley ランク（Morley rank）は $L(\mathcal{M})$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，順序数（または∞）を対応させる関数で，以下によって定義される：

(a) $\mathrm{RM}(\varphi)\geq 0 \Longleftrightarrow \varphi(\bar{x})$ が解を持つ；

(b) $\mathrm{RM}(\varphi)\geq\alpha+1 \Longleftrightarrow \varphi$ は可算個の Morley ランク $\alpha$ 以上の論理式に分かれる：すなわち論理式 $\psi_i(\bar{x})$ $(i<\omega)$ で次が成立するものがある．

- $\mathcal{M}\models\neg\exists\bar{x}[\psi_i(\bar{x})\wedge\psi_j(\bar{x})]$ $(i\neq j)$,
- $\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x})\wedge\psi_i(\bar{x}))\geq\alpha.$

(c) $\mathrm{RM}(\varphi)\geq\delta$ ($\delta$：極限順序数) $\Longleftrightarrow \mathrm{RM}(\varphi)\geq\alpha$ $({}^{\forall}\alpha<\delta)$；

(d) $\mathrm{RM}(\varphi)=\alpha \Longleftrightarrow \mathrm{RM}(\varphi)\geq\alpha$ かつ $\mathrm{RM}(\varphi)\geq\alpha+1$ でない；

(e) $\mathrm{RM}(\varphi)=\infty \Longleftrightarrow \mathrm{RM}(\varphi)\geq\alpha$ $({}^{\forall}\alpha$：順序数$)$．

2．論理式の集合 $\Sigma(\bar{x})$ に対しては，

$$\mathrm{RM}(\Sigma)=\min\{\mathrm{RM}(\varphi_1(\bar{x})\wedge\cdots\wedge\varphi_n(\bar{x}))：\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\subset_{\mathrm{fin}}\Sigma\}$$

と定義する．

3．$\mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ は $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ の省略形である．

論理式（またはタイプ）が順序数値の Morley ランクを持つとき（すなわち∞にならないとき），単に Morley ランクを持つという．

**命題153** $p(\bar{x})$ は代数的 $\Longleftrightarrow \mathrm{RM}(p(\bar{x}))=0$

**証明**：$p(\bar{x})$ が代数的なとき，$p$ は無限個の共通部分を持たない部分に分けること

ができない．したがって，$\mathrm{RM}(p)=0$ である．逆に $p(\bar{x})$ が代数的でないとき，無限個の解 $\bar{a}_i$ $(i=0,1,\cdots)$ を持つ．したがって $p$ は論理式 $\bar{x}=\bar{a}_i$ $(i=0,1,\cdots)$ によって分割される．　□

**命題154**

1．タイプ $p(\bar{x})$ に対しては $\varphi(\bar{x})\in p(\bar{x})$ で $\mathrm{RM}(p(\bar{x}))=\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x}))$ を満たすものがとれる；

2．$\sum(\bar{x})\subset\Gamma(\bar{x}) \Rightarrow \mathrm{RM}(\sum(\bar{x}))\geq\mathrm{RM}(\Gamma(\bar{x}))$.

証明は定義から明らかである．

**命題155（ランク不変の拡大の存在）**　$L(A)$-論理式の集合 $\sum(\bar{x})$ が充足的だとする．

1．任意の $\varphi(\bar{x})\in L(A)$ に対して，$\mathrm{RM}(\sum\cup\{\varphi\})=\mathrm{RM}(\sum)$ または $\mathrm{RM}(\sum\cup\{\neg\varphi\})=\mathrm{RM}(\sum)$；

2．$\sum(\bar{x})$ は $p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ に Morley ランクを変えないで拡大できる．

**証明**：2は1を繰り返し使うことによって得られる．1を示そう．「$\mathrm{RM}(\sum)\geq\alpha \Rightarrow \mathrm{RM}(\sum\cup\{\varphi\}\geq\alpha$ または $\mathrm{RM}(\sum\cup\{\neg\varphi\})\geq\alpha$」を $\alpha$ に関する帰納法で示す．$\alpha$ が極限順序数のときはほとんど明らかである．$\alpha=\beta+1$ としよう．いずれもが Morley ランクを減らしているとする．このとき，有限部分 $F(\bar{x})\subset\sum$ をうまくとれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{RM}(\bigwedge F\wedge\varphi)\leq\beta,\\
&\mathrm{RM}(\bigwedge F\wedge\neg\varphi)\leq\beta, \qquad (6.1)\\
&\mathrm{RM}(\bigwedge F)=\beta+1
\end{aligned}
$$

とできる．Morley ランクの定義から，無限個の論理式 $\{\psi_i(\bar{x}):i<\omega\}$ で互いに共通解がなく，$\mathrm{RM}(\bigwedge F(\bar{x})\wedge\psi_i(\bar{x}))\geq\beta$ となるものがある．帰納法の仮定から，各 $i<\omega$ に対して，$\mathrm{RM}(\bigwedge F\wedge\psi_i\wedge\varphi)\geq\beta$ あるいは $\mathrm{RM}(\bigwedge F\wedge\psi_i\wedge\neg\varphi)\geq\beta$ である．したがって，$\{\psi_i:i<\omega\}$の部分集合を選び，番号の付けかえを行えば（例えば），

$$\mathrm{RM}(\bigwedge F \wedge \psi_i \wedge \varphi) \geq \beta \quad ({}^\forall i < \omega)$$

と仮定できる．よって $\mathrm{RM}(\bigwedge F \wedge \varphi) \geq \beta + 1$ であるが，これは6.1に矛盾する． □

**注意156** Morley ランクを持つ論理式 $\varphi(\bar{x}) \in L(A)$ の $A$ 上のタイプへの拡大でランクを保存するものは，有限個しかない．もし無限個あれば，それらを論理式で分離することができるので，$\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x}))$ の値を 1 だけ押し上げてしまうからである．より正確には次のようにする：もし無限個の $p_i(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ $(i=0,1,\cdots)$ が $\varphi(\bar{x})$ のランクを変えない拡大として存在したとする．適当な $\psi_0(\bar{x})$ を選び，番号の付けかえを行えば，$\psi_0 \in p_0$，$\neg \psi_0 \in p_i$ $({}^\forall i > 0)$ と仮定できる．以下同様に番号の付けかえを繰り返して $\psi_i$ を

1． $\psi_i \in p_i$；
2． $\neg \psi_i \in p_j$ $({}^\forall j > i)$

となるようにとってゆく．このとき，$\varphi_i = \varphi \wedge \psi_i \wedge \bigwedge_{j<i} \neg \psi_j$ とすれば，$\varphi_i$ たちが互いに共通解を持たない論理式になる．また $\mathrm{RM}(\varphi_i) \geq \mathrm{RM}(p_i) = \mathrm{RM}(\varphi)$ だから，$\mathrm{RM}(\varphi) \geq \mathrm{RM}(\varphi) + 1$ となって矛盾を得る．

**定義157** Morley ランクを持つ論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，$\varphi$ の次数 $\deg(\varphi)$を，

$$\deg(\varphi) = \left| \{ p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(\mathcal{M}) : \varphi \in p, \mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{RM}(p) \} \right|$$

で定義する．(上の注意156により，その値は有限である．)

**定理158** 次の 2 条件は同値である：

1． $T$ は $\aleph_0$-安定；
2． $\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x})) < \infty \quad ({}^\forall \varphi(\bar{x}) \in L(\mathcal{M}))$．

(ただし条件 2 はランクが順序数になるという意味. 有限になるという意味ではない.)

**証明：1 ⇒ 2.** Morley ランクの定義から，

$$\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b}) \;\Rightarrow\; \mathrm{RM}(\psi(\bar{x}, \bar{a})) = \mathrm{RM}(\psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

が成立することがわかる. すなわち, Morley ランクの値の種類はタイプの種類 ($2^{\aleph_0}$

個以下）で抑えられる．したがって，

$$\mathrm{RM}(\psi(\bar{x})) \geq \alpha \Rightarrow \mathrm{RM}(\psi(\bar{x})) = \infty \quad (^\forall \psi \in L(\mathcal{M})) \tag{6.2}$$

となる順序数 $\alpha$ が存在する．

さて $\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x})) = \infty$ とすれば，$\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x})) > \alpha$ である．したがって，共通解のない $\varphi$ の拡大 $\varphi_0(\bar{x})$，$\varphi_1(\bar{x})$ で

$$\mathrm{RM}(\varphi_i(\bar{x})) \geq \alpha \quad (i=0,1)$$

となるものが存在する．6.2 により，

$$\mathrm{RM}(\varphi_i(\bar{x})) = \infty \quad (i=0,1)$$

である．以上の議論を繰り返し適用すると，充足的な論理式たち$\{\varphi_\eta(\bar{x}) : \eta \in {}^{\omega>}2\}$で

- $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}[\varphi_\eta(\bar{x}) \to \varphi_\nu(\bar{x})]$（$\eta$ は $\nu$ の拡大）；
- $\mathcal{M} \models \neg\, \exists \bar{x}[\varphi_{\eta^\frown 0}(\bar{x}) \wedge \varphi_{\eta^\frown 1}(\bar{x})]$

となるものの存在がわかる．このとき $\eta \in {}^\omega 2$ に対して，

$$p_\eta = \{\varphi_{\eta|n} : n < \omega\}$$

とすれば，これらは互いに異なるタイプとなる．したがって全部で $2^{\aleph_0}$ 個だけある．一方これらのタイプに現れるパラメータの数は可算個しかない．したがって，$T$ は $\aleph_0$-安定でない．

**2⇒1.** どの論理式（タイプ）も Morley ランクを持つとする．$A$ を可算集合とする．$p(x) \in \mathrm{S}_1(A)$ に対して，命題154によって，$\mathrm{RM}(\varphi(x)) = \mathrm{RM}(p(x))$ となる $\varphi(x) \in p(x)$ がとれることに注意する．したがって

$$\mathrm{S}_1(\mathrm{A}) = \bigcup_{\varphi(x) \in L(A)} \{p(x) \in S_1(A) : \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(\varphi), \varphi \in p\}$$

という分解が可能である．$\varphi$ のランクを変えない拡大は，注意156によって有限個である．したがって$|S_1(A)| \leq |L(A)| \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0$ を得る．　□

**定理159**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．$p(\bar{x}) \subset q(\bar{x})$ のとき，次は同値である：

1．$\mathrm{RM}(p)=\mathrm{RM}(q)$；

2．$p\subset_{\mathrm{nf}} q$.

**証明：1⇒2.** $\mathrm{RM}(p)=\mathrm{RM}(q)$ だが，$p\subset_{\mathrm{f}} q$ とする．$\mathrm{dom}(p)=A$ として，$\mathrm{dom}(q)=A\cup\bar{b}$ としておく（必要なら $q$ を適当に制限する）．$\varphi(\bar{x},\bar{b})\in q$ を分岐を実現している論理式とする．ただし $\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L(A)$．系124により，$A$ 上の一様列 $I=\{\bar{b}_i : i<\omega\}$，$\bar{b}_0=\bar{b}$ をうまくとれば，

$$\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_i) : i<\omega\}\text{の任意の無限部分集合は充足的でない} \tag{6.3}$$

ようにできる．$q_i\in \mathrm{S}(A\cup\bar{b}_i)$ を $q$ の中のパラメータ $\bar{b}$ をすべて $\bar{b}_i$ で置き換えた $q$ のコピーとする．さらに $r_i\in \mathrm{S}(\mathcal{M})$ を $q_i$ の Morley ランクを変えない拡大とする．これらは $p$ のランク不変の拡大にもなっている．また $I$ の選び方(6.3)から，$r_i$ の中には無限個の相異なるタイプが存在している．しかしこれは矛盾である（注意156参照）．

**2⇒1.** まず次の主張を示そう：

**主張** $\mathrm{RM}(\mathrm{stp}(\bar{a}/A))=\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$.

**主張の証明：** $E(\bar{x},\bar{a})\in \mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ が Morley ランクを下げているとする．いま $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が $E$ によって $n$ 個に分割されているとして，$\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$ を（$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の元による）それら異なる同値類の代表元とする．各 $E(\bar{x},\bar{a}_i)$ はやはり Morley ランクを下げている．したがって，命題155により，
$\mathrm{RM}(\bigvee_{i=1,\dots,n}E(\bar{x},\bar{a}_i))<\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ である．しかし $\bigvee_{i=1,\dots,n}E(\bar{x},\bar{a}_i)$ の解集合は $p$ の解集合を含むので，このようなことは有り得ない． □

2 だが 1 でないと仮定する．$p(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$，$q(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ とする．主張に注意すれば，$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ の拡大 $\mathrm{stp}(\bar{a}/B)$ は次を満たす：

- $\mathrm{RM}(\mathrm{stp}(\bar{a}/B))<\mathrm{RM}(\mathrm{stp}(\bar{a}/A))$；
- $\mathrm{stp}(\bar{a}/B)$ は $A$ 上分岐しない（補題142）．

一方 $\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ の Morley ランクを保存する拡大も存在して，それは非分岐拡大になる（∵ 1⇒2）．したがって $\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ が異なる 2 つの非分岐拡大を持つことに

なる．これは有限同値関係の定理（定理144）に反する．　□

## 6.3　超安定性と U-ランク

本節では $T$ は安定とする．

**定義160（U-ランク）**　U-ランクはタイプ $p(\bar{x})$ に対して順序数（または∞）を対応させる関数で，以下によって定義される：

1．$\mathrm{U}(p) \geq 0$；
2．$\mathrm{U}(p) \geq \alpha+1 \iff \mathrm{U}(q) \geq \alpha$，$q \supset_{\mathrm{f}} p$ となるタイプ $q$ が存在；
3．$\mathrm{U}(p) \geq \delta$（$\delta$：極限順序数）$\iff \mathrm{U}(p) \geq \alpha$（$^\forall \alpha < \delta$）；
4．$\mathrm{U}(p) = \alpha \iff \mathrm{U}(p) \geq \alpha$ だが $\mathrm{U}(p) \geq \alpha+1$ でない；
5．$\mathrm{U}(p) = \infty \iff \mathrm{U}(p) \geq \alpha$（$^\forall \alpha$：順序数）．

$\mathrm{U}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ は簡単に $\mathrm{U}(\bar{a}/A)$ とかくことにする．

**注意161**

1．「$r \supset_{\mathrm{f}} p \supset q$ ならば $r \supset_{\mathrm{f}} q$」から，「$p \supset q$ ならば $\mathrm{U}(p) \leq \mathrm{U}(q)$」が簡単にわかる．タイプの拡大が非分岐拡大の場合は U-ランクが等しくなることが以下で示される．
2．タイプ $p$ を基本写像で移動したコピーを $q$ とすれば，$\mathrm{U}(p) = \mathrm{U}(q)$ である．
3．タイプが分岐していれば，U-ランクは下がる：$\mathrm{U}(q) < \infty$，$p \supset_{\mathrm{f}} q$ ならば $\mathrm{U}(p) < \mathrm{U}(q)$ である．

**命題162**　$T$ が安定のとき，$p(\bar{x})$ は代数的 $\iff \mathrm{U}(p(\bar{x})) = 0$

**証明**：命題153の証明と同様．　□

**命題163**　$p \supset_{\mathrm{nf}} q$ ならば $\mathrm{U}(p) = \mathrm{U}(q)$．

**証明**：「$\mathrm{U}(q) \geq \alpha$ ならば $\mathrm{U}(p) \geq \alpha$」を $\alpha$ に関する帰納法で示す．$\alpha = \beta+1$ の場合に示せばよい．$p = \mathrm{tp}(\bar{a}/B)$，$q = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$，$B \supset A$ とする．仮定は

$$\bar{a} \underset{A}{\downarrow} B$$

である．$U(\bar{a}/A) \geq \beta+1$ だから，定義により，$A^* \supset A$ で $\mathrm{tp}(\bar{a}/A^*) \supset_{\mathrm{f}} \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$，$\mathrm{U}(\bar{a}/A^*) \geq \beta$ となるものが存在．$A^*$ を $A \cup \bar{a}$-基本写像で移動することにより，

$$A^* \underset{A \cup \bar{a}}{\downarrow} B$$

と仮定できる．このとき簡単な計算から，

1．$\mathrm{tp}(\bar{a}/B \cup A^*) \supset_{\mathrm{f}} \mathrm{tp}(\bar{a}/B)$；

2．$\mathrm{tp}(\bar{a}/B \cup A^*) \supset_{\mathrm{nf}} \mathrm{tp}(\bar{a}/A^*)$

が成立している．条件2と帰納法の仮定（$\beta$ の場合）を用いると $\mathrm{U}(\bar{a}/B \cup A^*) \geq \beta$ である．これと条件1を使うと，U-ランクの定義から，$\mathrm{U}(\bar{a}/B) \geq \beta+1=\alpha$ を得る．□

**定理164**　次の2条件は同値である：

1．$T$ は超安定；

2．$\mathrm{U}(p(\bar{x}))<\infty$（$^\forall p(\bar{x})$：タイプ）．

**証明**：定理131により，超安定性は長さ $\omega$ の分岐拡大列が存在しないことと同値である．このことに注意しよう．

**1⇒2.**　1を仮定しよう．各 $p$ に対して，$|\mathrm{dom}(q)|<\kappa(T)=\aleph_0$ で $p \supset_{\mathrm{nf}} q$ となるものがある（系129参照）．この $q$ に対して，上の命題163から，$\mathrm{U}(p)=\mathrm{U}(q)$ が成立する．このことと，注意161の2番により，U-ランクの値の種類は限られていることがわかる．すなわち，定数 $\alpha$ を選ぶと，

$$U(p) \geq \alpha \Rightarrow U(p)=\infty \quad (^\forall p：タイプ)$$

が成立している．このことに注意しながら議論を進める．$U(p)=\infty$ となったとすれば，$p_1 \supset_{\mathrm{f}} p$ で $\mathrm{U}(p_1)=\infty$ となるものがある．$p_1$ に対しても同様に分岐拡大でU-ランクが無限になるものがある．以下同様に議論を続ければ長さ $\omega$ の分岐拡大列を作ることができる．しかしこれは $T$ が超安定でないことを意味する．

**2⇒1.**　1でないとすると，長さ $\omega$ の分岐拡大列：

$$p_{i+1} \supset_{\mathrm{f}} p_i \quad (^\forall i<\omega)$$

が存在する．もし $\mathrm{U}(p_0)<\infty$ とすれば，上の列により，順序数の無限下降列 $\{U(p_i):i<\omega\}$ が存在してしまう．したがって $U(p_0)=\infty$ でなければならない．これは2の否定である．　□

以上をまとめると：

**定理165**　$T$ を超安定とする．$p(\bar{x})\subset q(\bar{x})$ のとき，次は同値である：

1．$\mathrm{U}(p)=\mathrm{U}(q)$；

2．$p\subset_{\mathrm{nf}} q$.

## 6.4　安定性と $(\varphi,\omega)$-ランク

**定義166（$(\varphi,\omega)$-ランク）**　$\sum(\bar{x})$ を自由変数 $\bar{x}$ を持つ $L(\mathcal{M})$-論理式の充足的な集合とする．また $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を $L$-論理式とする．各 $n\in\omega$ に対して，変数列の集合 $\{\bar{x}_\nu:\nu\in{}^n\omega\}\cup\{\bar{y}_\eta^{\{i,j\}}:\eta\in{}^{n>}\omega,\{i,j\}\subset\omega,i\neq j\}$ ($\mathrm{lh}(\bar{x}_\nu)=\mathrm{lh}(\bar{x})$，$\mathrm{lh}(\bar{y}_\eta^{\{i,j\}})=\mathrm{lh}(\bar{y})$) を用意して，$\sum_n$ を次の論理式の集合の和集合とする：

1．$\bigcup_{\nu\in{}^n\omega}\sum(\bar{x}_\nu)$；

2．$\{\varphi(\bar{x}_\nu,\bar{y}_{\nu|k}^{\{\nu(k),\nu'(k)\}})\not\leftrightarrow\varphi(\bar{x}_{\nu'},\ \bar{y}_{\nu|k}^{\{\nu(k),\nu'(k)\}}):\nu|k=\nu'|k,\nu(k)\neq\nu'(k)\}$.

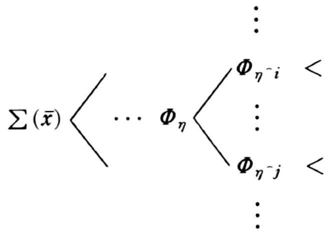
$\sum_n$ を $\sum$ から始まる高さ $n$ の $(\varphi,\omega)$-樹形図とよぶことにする．$\sum=\emptyset$ のときは単に高さ $n$ の $(\varphi,\omega)$-樹形図とよぶ．$\sum_n$ が充足的になる（$\bar{x}_\nu$，$\bar{y}_\eta^{\{i,j\}}$に対する解が存在する）最大の $n\in\omega$ を $\sum$ の $(\varphi,\omega)$-ランクといい，$\mathrm{R}(\sum,\varphi,\omega)=n$ で表わす．そのような $n$ が存在しないとき，$\mathrm{R}(\sum,\varphi,\omega)=\omega$ とする．

**注意167**　$\sum(\bar{x})$ から始まる高さ $n$ の $(\varphi,\omega)$-樹形図の $\bar{x}_\nu$ の解 $\bar{a}_\nu$，$\bar{y}_\eta^{\{i,j\}}$ の解 $\bar{b}_\eta^{\{i,j\}}$ をとる．空でない $\eta\in{}^{n>}\omega$ に対して，$\eta^-=\eta|(\mathrm{lh}(\eta)-1)$, $k=\eta(\mathrm{lh}(\eta)-1)$（$\eta$ の最後の元）とする．また $\eta^*\in{}^n\omega$ を $\eta$ の拡大（延長）として，

$$\begin{aligned}\Phi_\eta=&\{\varphi(\bar{x},\bar{b}_{\eta^-}^{\{k,i\}}):i\in\omega,\ \mathcal{M}\models\varphi(\bar{a}_{\eta^*},\bar{b}_{\eta^-}^{\{k,i\}})\}\\&\cup\{\neg\varphi(\bar{x},\bar{b}_{\eta^-}^{\{k,i\}}):i\in\omega,\ \mathcal{M}\models\neg\varphi(\bar{a}_{\eta^*},\bar{b}_{\eta^-}^{\{k,i\}})\}\end{aligned}$$

を定義する．これは$\eta^*$ の選び方によらず決まる．$\nu\neq\nu'$（$\nu|k=\nu'|k$，$\nu(k)\neq\nu'(k)$）

のとき，$\bar{a}_\nu$ と $\bar{a}_{\nu'}$ は，$\Phi_{\nu|k}$ をともに満たすが，$\Phi_{\nu|(k+1)}$ と $\Phi_{\nu'|(k+1)}$ によって区別される．実際 $(\varphi, \omega)$-樹形図の定義により，この二つを同時に満たす元はない．したがって，図式的にかけば次のようになる．




$\varphi$-樹形図との違いは，

- 各点で $\omega$ 個の枝に分岐している．
- 各点には一つの論理式でなく $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ または $\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ の形の論理式の集合がのっている．

の 2 点である．

**補題168** $\mathrm{R}(\sum, \varphi, 2) < \omega \iff \mathrm{R}(\sum, \varphi, \omega) < \omega$.

**証明**：高さ $n$ の $(\varphi, \omega)$-樹形図が充足的ならば，その一部と考えられる高さ $n$ の $\varphi$-樹形図（2 分岐）は充足的である．したがって⇒の向きは明らかである．

次に逆向き⇐を示す．本質は，顔を斜め45度にして 2 分岐樹形図を見れば $\omega$ 分岐樹形図になるということである†．これを数学的にきちんと表現しようとすると以下ようになる．$\eta \in {}^{\omega>}\omega$ に対して，$\eta^* \in {}^{\omega>}2$ を

$$\eta^* = \underbrace{0, \cdots, 0}_{\eta(0)\text{個}}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{\eta(1)\text{個}}, 1, \cdots, \underbrace{0, \cdots, 0}_{\eta(k)\text{個}}, 1$$

で定義する．ただし，$k = \mathrm{lh}(\eta) - 1$ である．同様に無限列 $\nu \in {}^{\omega}\omega$ に対しても，$\nu^* \in {}^{\omega}2$ を定義しておく．$\mathrm{R}(\sum, \varphi, 2) = \omega$ とすれば(コンパクト性により)，$\bar{b}_\eta$ $(\eta \in {}^{\omega>}2)$ を選んで，各 $\nu \in {}^{\omega}2$ に対する，

† 図の方を斜め45度にしてもよい．

$$\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\nu|k}) : k<\omega, \nu(k)=0\} \cup \{\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\nu|k}) : k<\omega, \nu(k)=1\}$$

を充足的にできる．その解を $\bar{a}_\nu$ とする．いま $\nu \in {}^{\omega}\omega, \eta \in {}^{\omega>}\omega$ に対して，

$$\bar{a}_\nu^* = \bar{a}_{\nu^*},$$
$$\bar{b}_\eta^{\{i,j\}*} = \bar{b}_{(\eta^\frown i)^*} \quad (i<j)$$

と定義する．このとき，高さ $\omega$ の $(\varphi, \omega)$-樹形図を考える．$\bar{x}_\nu$ として $\bar{a}_\nu^*$，$\bar{y}_\eta^{\{i,j\}}$ として $\bar{b}_\eta^{\{i,j\}*}$ がその解になっていることがわかる．　□

この補題と安定性の基本定理（定理87）により次を得る．

**定理169**　次の２条件は同値：

1．$T$ は安定；

2．$\mathrm{R}(\bar{x}=\bar{x}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \omega)<\omega \quad ({}^\forall\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in L)$.

次の補題も $(\varphi, \omega)$-ランクの定義から明らかである．

**補題170**

1．$\mathrm{R}(\Sigma(\bar{x}), \varphi, \omega) \geq \mathrm{R}(\Sigma'(\bar{x}), \varphi, \omega) \quad (\Sigma \subset \Sigma')$.

2．$\Sigma(\bar{x})$ の有限部分集合 $\varDelta(\bar{x})$ を選んで，$\mathrm{R}(\Sigma, \varphi, \omega)=\mathrm{R}(\varDelta, \varphi, \omega)$ とすることができる．

**補題171**　勝手な $\Sigma(\bar{x})$ と $\psi(\bar{x})$ に対して，

- $\mathrm{R}(\Sigma \cup \{\psi\}, \varphi, \omega)=\mathrm{R}(\Sigma, \varphi, \omega)$ または，
- $\mathrm{R}(\Sigma \cup \{\neg\psi\}, \varphi, \omega)=\mathrm{R}(\Sigma, \varphi, \omega)$.

**証明**：$n$ に関する帰納法により，

$$R(\Sigma(\bar{x}), \varphi, \omega) \geq n \Rightarrow \begin{cases} R(\Sigma(\bar{x}) \cup \{\psi(\bar{x})\}, \varphi, \omega) \geq n \quad \text{または，} \\ R(\Sigma(\bar{x}) \cup \{\neg\psi(\bar{x})\}, \varphi, \omega) \geq n \end{cases}$$

を示す．$\Sigma$ から始まる高さ $n$ の $(\varphi, \omega)$-樹形図が充足的とする．（以下では定義166での記号を使う）．その樹形図において，$\bar{a}_\nu$ を $\bar{x}_\nu$ の解，$\bar{b}_\eta^{\{i,j\}}$ を $\bar{y}_\eta^{\{i,j\}}$ の解とする．各 $k \in \omega$ に対して，

$$\textstyle\sum_k = \sum \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\phi}^{\{k,j\}}) : j < \omega, j \neq k, \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_{k^\frown\eta}, \bar{b}_{\phi}^{\{k,j\}})\}$$
$$\cup \{\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\phi}^{\{k,j\}}) : j < \omega, j \neq k, \mathcal{M} \models \neg\varphi(\bar{a}_{k^\frown\eta}, \bar{b}_{\phi}^{\{k,j\}})\}$$

は（$\eta \in {}^{n-1}\omega$ によらず決まり）高さ $n-1$ の充足的な $(\varphi, \omega)$-樹形図を持つ．帰納法の仮定により，例えば $\mathrm{R}(\sum_k \cup \{\psi\}, \varphi, \omega) \geq n-1$ となる $k$ が無限個ある．したがって，番号の付け替えをすれば，すべての $k$ に対して，$\sum_k \cup \{\psi\}$から始まる高さ $n-1$ の$(\varphi, \omega)$-樹形図が充足的になる．よって，$\sum \cup \{\psi\}$から始まる高さ $n$ の $(\varphi, \omega)$-樹形図が充足的になる．　□

**補題172**　$\mathrm{R}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A), \varphi, \omega) = \mathrm{R}(\mathrm{stp}(\bar{a}/A), \varphi, \omega)$

**証明：**補題170により，$E(\bar{x}, \bar{a}) \in \mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ に対して，$\mathrm{R}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A), \varphi, \omega) = \mathrm{R}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A) \cup \{E(\bar{x}, \bar{a})\}, \varphi, \omega)$ を示せばよい．$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の解で $E$ の異なる同値類に属する元たち（の極大集合）とする．$n$ 個の集合

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) \cup \{E(\bar{x}, \bar{a}_i)\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

は互いに $A$-基本写像で移りあうので，等しい $(\varphi, \omega)$-ランクを持つ．補題171により，それらはすべて $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の $(\varphi, \omega)$-ランクと等しい．　□

**定理173**　$T$ を安定とする．$p(\bar{x}) \subset q(\bar{x})$ のとき，次は同値である：

1．$\mathrm{R}(p, \varphi, \omega) = \mathrm{RM}(q, \varphi, \omega)$　$({}^\forall\varphi(\bar{x}) \in L)$；

2．$p \subset_{\mathrm{nf}} q$.

**証明：**$A = \mathrm{dom}(p)$，$B = \mathrm{dom}(q)$ として，$q = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ とする．**2⇒1.**　2 を仮定する．補題172により，

$$\mathrm{R}(\mathrm{stp}(\bar{a}/A), \varphi, \omega) \leq \mathrm{R}(\mathrm{tp}(\bar{a}/B), \varphi, \omega)$$

を示せばよい．$n = \mathrm{R}(\mathrm{stp}(\bar{a}/A), \varphi, \omega)$ とすれば，$\mathrm{stp}(\bar{a}/A)$ から始まる高さ $n$ の充足的な $(\varphi, \omega)$-樹形図がある．その樹形図の変数 $\bar{x}_\nu$ の解 $\bar{a}_\nu$ は，$B$ と $A$ 上独立だと仮定できる（必要なら $A$-基本写像で移動する）．定理144により，強タイプは定格的だから，各 $\bar{a}_\nu$ は $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ の解となる．すなわち，$\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ から始まる高さ $n$

の $(\varphi, \omega)$-樹形図が存在する．

**1⇒2.** $p \subset_f q$ とする．必要なら $q$ の定義域を制限して，$q \in \mathrm{S}(A \cup \bar{b})$，$p \in \mathrm{S}(A)$ と仮定できる．$\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ を分枝する原因の論理式とする．系124により，$\bar{b}$ から始まる $A$ 上の一様集合 $\{\bar{b}_i : i \in \omega\}$ を選んで，$\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < \omega\}$ の中の任意の無限個を同時に満足する元はないようにできる．$q_{\bar{b}_i}$ は $q$ の中のパラメータを $\bar{b}_i$ で置き換えたタイプとする．各 $q_{\bar{b}_i}$ を共通の定義域まで非分岐拡大で拡大する．それらを $q_i^*$ とする．必要なら番号を付け替えることにより，

$$q_i^* | \varphi \ (i \in \omega) \text{ はすべて異なる}$$

と仮定できる．また

$$R(q_i^*, \varphi, \omega) = R(q, \varphi, \omega) \quad (i \in \omega)$$

である（2⇒1を使った）．したがって，もし各 $q_i^*$ の上に高さ $n$ の充足的な $(\varphi, \omega)$-樹形図があれば，$p$ の上には高さ $n+1$ の充足的な樹形図があることになる．　□

# 第7章　次元の概念

この章では $T$ は安定とする．ただし後半では主に $\aleph_0$-安定な理論を扱う．

$\mathcal{M}$ の二つの元が独立である（あるいは従属である）という概念が安定な $T$ において定義されることはすでに示した．そこで次に欲しいのが次元の概念である．集合 $A$ の次元を

$$\dim(A) = 「A \text{ の極大独立部分集合の濃度}」$$

で定義したいわけである．しかしこの次元が well-defined になる保証はない．すなわち極大独立部分集合の選び方によって次元が変化する可能性がある．具体的なベクトル空間での一次独立性や代数閉体における代数的独立性と異なり，我々の独立概念はかなり抽象的である．したがって，具体的な構造での議論が何の仮定もせずに通用するとは限らないのである．したがって次元が定義できるための条件をさがすことが必要になる．またベクトル空間や代数閉体では全体が一つの次元によって規定されるが，一般には「いろいろな方向」の次元を考える必要がある．そこでタイプ $p$ の解からなる集合 $A$ に対して常に次元が定義できるための（十分）条件として，$p$ が正則であるという条件を設定する．実は正則の条件があれば具体的構造での議論とほぼ同一の議論を展開できる．さらに $T$ が $\aleph_0$-安定の場合は正則タイプがかなり普遍的に存在することが示される．

## 7.1　正則タイプの定義

**定義174（タイプの直交）**

1．$p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ と $q(\bar{y}) \in \mathrm{S}(A)$ がほとんど直交する（almost orthogonal，記号：$p \perp^{a} q$）とは，

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a} \text{ が } p \text{ の解} \\ \bar{b} \text{ が } q \text{ の解}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{a} \underset{A}{\downarrow} \bar{b}$$

が成立することである；

2．$p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ と $q(\bar{y})\in \mathrm{S}(B)$ が直交する（orthogonal，記号：$p\perp q$）とは，

$$\left.\begin{array}{r} p^* \supset_{\mathrm{nf}} p \\ q^* \supset_{\mathrm{nf}} q \\ \mathrm{dom}(p^*)=\mathrm{dom}(q^*) \end{array}\right\} \Rightarrow p^* \perp^{\mathrm{a}} q^*$$

が成立することである．

$p\perp q$ の否定を表わす記号として，$p\not\perp q$，また $p\perp^{\mathrm{a}} q$ の否定として，$p\not\perp^{\mathrm{a}} q$ を用いる．

**注意175**　「ほとんど直交」は同じ定義域の二つのタイプに対しての概念だが，「直交」の場合は定義域が異なっていてもよい．$p\perp q$ という概念は，多くの場合，$p$ と $q$ が定格的な場合に用いる．その場合には次が成立する：

$$p\perp q \Longleftrightarrow {}^{\forall}A\supset \mathrm{dom}(p)\cup \mathrm{dom}(q)\,[p|A\perp^{\mathrm{a}} q|A]$$

**例176**　「直交」と「ほとんど直交」は異なる概念である．三つの述語記号からなる言語 $L=\{P(*), Q(*), R(*, *, *)\}$ に対して，$L$-構造 $M=(P^M \sqcup Q^M\,;\, P^M, Q^M, R^M)$ を，

- $P^M$ と $Q^M$ は $\mathbb{Q}$ の異なるコピー（$P^M\cap Q^M=\emptyset$）；
- $R^M=\{(a,b,c)\in P^M\times(Q^M)^2 : a=b-c$（$\mathbb{Q}$ の元として）$\}$

とする．（できあがった $M$ には＋の構造は入っていないことに注意．また M は安定になる．例80参照．）$P(x)\cup\{x\neq 0\}$ と $Q(x)$ はタイプ（を生成する完全な論理式）となる．勝手な $b, c\in Q^M$ に対して，$\sigma : M\to M$ を，

- $\sigma|P^M=\mathrm{id}$；
- $x\in Q^M$ のときは $\sigma(x)\in Q^M$ は $\sigma(x)=x-b+c$

と定義する．$\sigma$ は $b$ を $c$ に移動する $M$ の同型写像である．また $P^M$ の元はこの写像で固定されている．したがって，任意の $a\in P^M$ に対して，

$$\mathrm{tp}(a^\frown b)=\mathrm{tp}(a^\frown c)$$

が成立．よって，$P \perp^{a} Q$ となることがわかる．同様の議論により，$Q^M$ の異なる2元 $b, c$ も独立になる．しかし，$R(a, b, c)$ となる $a \in P^M$ がただ一つ存在するから，$a \not\downarrow \{b, c\}$（よって $a \not\downarrow_c b$）である．これは $P \not\perp Q$ を示す．

**補題177（直交性の保存）**　$p, q$ を定格的なタイプとして，$p^*$，$q^*$ をそれぞれの非分岐拡大とする．このとき，

$$p \perp q \iff p^* \perp q^*$$

が成立する．

**証明**：⇒は⊥の定義と非分岐拡大の推移性（系106）から明らかである．⇐については，次のようにする．$p \not\perp q$ とすれば，$A \supset \mathrm{dom}(p) \cup \mathrm{dom}(q)$ と $\bar{a}$（$p$ の解）と $\bar{b}$（$q$ の解）を選んで，

1．$\bar{a} \downarrow_{\mathrm{dom}(p)} A$，$\bar{b} \downarrow_{\mathrm{dom}(q)} A$；

2．$\bar{a} \not\downarrow_A \bar{b}$

とできる．$A$-基本写像で $\bar{a}$ と $\bar{b}$ を移動して，

3．$A \cup \mathrm{dom}(p^*) \cup \mathrm{dom}(q^*) \downarrow_A \bar{a} \cup \bar{b}$

が成り立つようにする．条件1と3により（推移性を使って），

$$\bar{a} \downarrow_{\mathrm{dom}(p)} A \cup \mathrm{dom}(p^*) \cup \mathrm{dom}(q^*)$$
$$\bar{b} \downarrow_{\mathrm{dom}(q)} A \cup \mathrm{dom}(p^*) \cup \mathrm{dom}(q^*)$$

を得る．$p$ と $q$ が定格的だったから，$\bar{a}$ が $p^* | (A \cup \mathrm{dom}(p^*) \cup \mathrm{dom}(q^*))$ の解で，$\bar{b}$ が $q | (A \cup \mathrm{dom}(p^*) \cup \mathrm{dom}(q^*))$ の解となる．また条件2と3に補題107を使えば，

$$\bar{a} \not\downarrow_{A \cup \mathrm{dom}(p^*) \cup \mathrm{dom}(q^*)} \bar{b}$$

がでる．したがって $p^* \not\perp q^*$ を得る．　□

補題177の ⇐の証明は次の補題の証明を含んでいる．

**補題178**　1．$p, q \in \mathrm{S}(A)$ を定格的なタイプとする．このとき，次が成立する．

$$p \not\perp^{a} q \Rightarrow p|B \not\perp^{a} q|B\,(\forall B \supset A).$$

2．$p, q \in \mathrm{S}(A), A \subset B$ とするとき，

$$p \perp q \iff 「p^*, q^* \in \mathrm{S}(B), p^* \supset_{\mathrm{nf}} p, q^* \supset_{\mathrm{nf}} q \Rightarrow p^* \perp q^*」$$

**問題179**　$\bar{a} \downarrow_A \bar{b}, \mathrm{tp}(\bar{a}/A) \perp p, \mathrm{tp}(\bar{b}/A) \perp p$ のとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}^\frown\bar{b}/A) \perp p$ を示せ．

**定義180（正則タイプ）**　$p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ は無限個の解を持つ（代数的でない）定格的なタイプとする．また $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ とする．次が成立するとき，対 $(p, \varphi)$ は正則タイプ（regular type）とよばれる：

$$\varphi(\bar{x}) \in q(\bar{x}), \mathrm{dom}(q(\bar{x})) \supset A \Rightarrow q \supset_{\mathrm{nf}} p \text{ または } p \perp q.$$

$(p, \varphi)$ が正則タイプのとき，もし $\varphi$ を明示する必要なければ，単に $p$ を正則タイプという．

**問題181**　$\mathrm{RM}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) = 1, \deg(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) = 1$ となる論理式 $\varphi$ をタイプ $p \in \mathrm{S}(\bar{a})$ にランクを変えないで拡大する．$(p, \varphi)$ は正則になることを示せ．（ヒント：$\varphi(\bar{x}) \in q, \bar{a} \in \mathrm{dom}(q)$ とする．$\mathrm{RM}(q) = 1$ ならば，$\deg(\varphi) = 1$ により，$q \supset p$ である．また $q$ と $p$ のランクが等しいことから $q \supset_{\mathrm{nf}} p$ になっている．$\mathrm{RM}(q) = 0$ ならば $q$ は代数的だからどんなタイプとも直交する.）

**命題182（正則性の保存）**　$\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x}) \subset_{\mathrm{nf}} q(\bar{x})$ で $p$ は定格的（したがって $q$ も定格的）とする．このとき，次が成立する：

$$(p, \varphi) \text{ が正則} \iff (q, \varphi) \text{ が正則}.$$

**証明**：補題178により明らかである．　□

**命題183**　$p \in \mathrm{S}(A)$ を正則とする．

1．$q \supset_{\mathrm{f}} p \Rightarrow p \perp q$；

2．$p$ の解 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ に対して，従属関係の推移性：

$$\bar{a} \not\downarrow_A \bar{b},\ \bar{b} \not\downarrow_A \bar{c} \Rightarrow \bar{a} \not\downarrow_A \bar{c}$$

が成立する．

**証明**：

1．正則の定義よりも弱いことを主張している．

2．$\bar{a} \not\downarrow_A \bar{b}$ かつ $\bar{a} \downarrow_A \bar{c}$ とすれば，$\mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup \bar{a})$ は $p$ の分岐拡大で，$\mathrm{tp}(\bar{c}/A \cup \bar{a})$ は $p$ の非分岐拡大．したがって1により，$\mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup \bar{a}) \perp \mathrm{tp}(\bar{c}/A \cup \bar{a})$．よって，$\bar{b} \downarrow_{A \cup \bar{a}} \bar{c}$．再び $\bar{a} \downarrow_A \bar{c}$ を使って，$\bar{b} \downarrow_A \bar{c}$ を得る（独立概念の推移性を使う）．　□

**注意184**　定格タイプ $p$ が命題183の1を満たすとき，本書では弱い意味で正則という．普通は本書での正則タイプを強正則タイプ（strongly regular type），そして弱い意味での正則タイプを単に正則タイプという場合が多い．

## 7.2　正則タイプと次元

**定義185（次元）**　$I = \{\bar{a}_i : i < \kappa\}$とする．$\dim(I/A) = \lambda$ であるとは，

1．$|K| = \lambda$；

2．$\{\bar{a}_i : i \in K\}$ は $B$ 上独立な $A$ の極大部分集合

となる $K \subset \kappa$ が存在することである．$\dim(I/A) = \lambda$ となる $\lambda$ を $I$ の $A$ 上の次元（dimension）とよぶ．

**問題186**　$L = \{E_1(*,*), E_2(*,*)\}$として，$T$ を次の $M = (M : E_1^M, E_2^M)$ の理論 $T = \mathrm{Th}(M)$ とする：各 $E_i^M$ は無限個の同値類を持つ $M$ 上の同値関係で，$E_1^M$ の同値類と $E_2^M$ の同値類は必ず交わり，その交わりも無限集合である．このとき，3点からなる集合 $I = \{a, b, c\}$で $\dim(I/\emptyset) = 1$ かつ $\dim(I/\emptyset) = 2$ となるものを見つけよ．（ヒント：$a$ と $b$ を $E_1^M$ でも $E_2^M$ でも異なる同値類に属する元とする．$c$ を $a/E_1^M$ と $b/E_2^M$ の交わりから選ぶ．このような $E_1$ と $E_2$ を相互分割同値関係とよぶ.）

**定理187（次元の存在）**　$I$ を正則タイプ $p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ の解の集合とする．このとき $\dim(I/A)$ は一意的に定まる．

**証明**：表現を簡潔にするため，$A = \emptyset$として，さらに $p$ は1変数タイプとしておく．

$I$ が有限の場合が本質的なので，$I$ は有限としておく．無限の場合は問題134での議論を参考にすればよい．

**主張**　独立な $J \subset I$ に対して，$\mathrm{cl}(J)=\{a\in I : a \not\downarrow J\}$ とするとき，$\mathrm{cl}(J_0)=\mathrm{cl}(J_1) \Rightarrow |J_0|=|J_1|$.

**主張の証明**：主張に反例が存在したとして，そのような $J_0, J_1$ の中で $K=J_0\cap J_1$ の大きさが最大のものを選ぶ．$J_1-K=\{a_1,\ldots,a_n\}$ と並べておく．$a\in J_0-K$ とするとき，仮定 $\mathrm{cl}(J_0)=\mathrm{cl}(J_1)$ により，$a \not\downarrow_{K\cup\{a_1,\ldots,a_{m-1}\}} a_m$ となる元 $a_m \in J_1-K$ がある．これに $J_1$ の独立性を使うと，$a \not\downarrow_{J_1-\{a_m\}} a_m$ が導かれる．さらに

- $\mathrm{tp}(a_m/J_1-\{a_m\}) \supset_{\mathrm{nf}} p$；
- $\mathrm{tp}(a/J_1-\{a_m\}) \supset_{\mathrm{nf}} p$（$p$ の正則性による．分岐していれば，$a \downarrow_{J_1-\{a_m\}} a_m$ となる）．

$p|(J_1-\{a_m\})$ は正則タイプだから，これに命題183の２番を使えば，$\mathrm{cl}((J_1-\{a_m\})\cup\{a\})=\mathrm{cl}(J_1)=\mathrm{cl}(J_0)$ を得る．したがって，$(J_1-\{a_m\})\cup\{a\}$ と $J_0$ は新たな反例で，共通部分は $K\cup\{a\}$ である．これは $K$ の最大性に反する．　□

**定理の証明**：$J_0, J_1\subset I$ を二つの基底とすれば，$\mathrm{cl}(J_0)=\mathrm{cl}(J_1)$．したがって，主張により，$|J_0|=|J_1|$．これは $\dim(I)$ が一意的なことを意味する．　□

## 7.3　正則タイプの性質

一般のタイプで成立する次の命題をまず示そう．

**命題188**

1．$\varphi(\bar{x})\in \mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ として，$I\subset M$ を $\varphi(\bar{x})\in L(\bar{b})$ の解全体の集合とする．このとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ は $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b}\cup I)$ で生成される．（すなわち，$\bar{d}$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b}\cup I)$ の解とすれば，それは $\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ の解になる．）

2．$\kappa\geq\aleph_1$ として，$M$ を $\kappa$-飽和モデルとする．また $A\subset M$ を $|A|<\kappa$ とする．$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の $M$ での解全体の集合を $I$ とするとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ は $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$ で生成される．

**証明**：証明は本質的に同じであるから，以下では 2 を示す．$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ を $\varphi(\bar{x})$ と読みかえれば，1 の証明ができる．その場合タイプでなく一つの論理式なので $\kappa$-飽和性が必要なくなる．

次の 2 つの主張を示す．

**主張 1**　$\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$ は定格的である．

**主張 1 の証明**：$E\in\mathrm{FE}(A\cup I)$ として，$E(\bar{x},\bar{a})\in\mathrm{stp}(\bar{a}/A\cup I)$ とする．$n(E)<\omega$ から，$\bar{a}'\in M$ で，

$$\mathcal{M}\models E(\bar{a},\bar{a}')$$

となるものがある．$M$ が $\kappa$-飽和なことと，$|A|<\kappa$ により，$p(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ を拡大した充足的な集合

$$p(\bar{x})\cup\{E(\bar{x},\bar{a}')\}$$

は $M$ に解 $\bar{a}''$ を持つ．もちろん $\bar{a}''\in I$ であり，$\mathcal{M}\models E(\bar{a},\bar{a}'')$ が成立している．したがって，$E(\bar{x},\bar{a}'')\in\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)=\mathrm{tp}(\bar{b}/A\cup I)\ &\Rightarrow\ \mathcal{M}\models E(\bar{b},\bar{a}'')\\ &\Rightarrow\ \mathcal{M}\models E(\bar{b},\bar{a}).\end{aligned}$$

$E$ は任意だから，$\mathrm{stp}(\bar{a}/A\cup I)=\mathrm{stp}(\bar{b}/A\cup I)$ を得る．よって，有限同値関係の定理の系146により，$\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$ が定格的になることがわかる．　□

**主張 2**　$\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$ の任意の解 $\bar{a}'$ に対して，$\mathrm{tp}(\bar{a}'/M)\supset_{\mathrm{nf}}\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$．

**主張 2 の証明**：$\varphi(\bar{x},\bar{b})\in\mathrm{tp}(\bar{a}'/M)$ とする．$M$ が $\kappa$-飽和なことにより，$p(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ を拡大した $L(A\cup\bar{b})$-論理式の集合

$$p(\bar{x})\cup\{\varphi(\bar{x},\bar{b})\}$$

は $M$ に解を持つ．またその解はもちろん $I\subset M$ に入っている．このことは $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ が $A\cup I$ 上分岐しないことを意味する．　□

$\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$ の解 $\bar{b}$ を任意にとるとき，主張 2 により，$\mathrm{tp}(\bar{b}/M)$ は $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\cup I)$

の非分岐拡大．しかし，それは一つしかない非分岐拡大 $\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$（主張1）に一致する．　□

**定理189（飽和モデル上の直交関係）**　$M$ を $\aleph_1$-飽和モデルとする．$p, q \in S(M)$ に対して，

$$p \perp q \iff p \perp^{a} q$$

が成立する．

**証明：** ⇒は定義から明らかである．⇐を示す．表現を簡潔にするため，$p$ と $q$ はともに1変数タイプとしておこう．

対偶を示すために，$p \not\perp q$ とする．定理128と系129により，$p$ と $q$ がともに $N$ 上非分岐になるような可算部分モデル $N \prec M$ を選ぶ．直交関係が平行なタイプでは保存されるから，$p|N \not\perp q|N$ である．次に $\bar{d}$ をうまくとれば，

$$p|(N \cup \bar{d}) \not\perp^{a} q|(N \cup \bar{d})$$

である．したがって，$a$ を $p|(N \cup \bar{d})$ の解，$b$ を $q|(N \cup \bar{d})$ の解として，

$$a \underset{N \cup \bar{d}}{\not\downarrow} b \tag{7.1}$$

となるようにできる．$a^\frown b^\frown \bar{d}$ を $N$-基本写像で動かして，$\bar{d} \in M$ と仮定できる．動かしても式7.1は不変である．さらに $\bar{a}^\frown \bar{b}$ を動かして $M \downarrow_{N \cup \bar{d}} \bar{a}^\frown \bar{b}$ とする．式7.1は不変である．このとき，$a$ は $p|M$ の解，$b$ は $p|M$ の解となる．さらに

$$a \underset{M}{\not\downarrow} b$$

が成立している．これは $p \not\perp^{a} q$ を示している．　□

**定理190**　$p$，$q \in S(N)$ として，$(p, \varphi)$ は正則とする．いま

$$p \not\perp^{a} q$$

ならば，$q$ の解を持つモデル $M \succ N$ は $p$ の解も必ず持つ．

**証明：** $p \not\perp^{a} q$ とすれば，$p$ の解 $\bar{a}, q$ の解 $\bar{b}$ で $N$ 上従属となるものが存在する．$M$

は $q$ の解を持つので，$\bar{b}\in M$ としてよい．

$$I=\{\bar{d}\in M:\bar{d} \text{ は } \varphi \text{ の解}\}$$

とすれば，命題188の 1 により，$\mathrm{tp}(\bar{a}/M)\supset_{\mathrm{nf}}\mathrm{tp}(\bar{a}/N\cup I)$．しかし，$\bar{a}$ と $\bar{b}\in M$ の選び方から，$\mathrm{tp}(\bar{a}/M)\supset_{\mathrm{f}}\mathrm{tp}(\bar{a}/N)$．したがって，$\mathrm{tp}(\bar{a}/N\cup I)\supset_{\mathrm{f}} p$ を得る．$I_0\subset_{\mathrm{fin}}I$ を，

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/N\cup I_0)\supset_{\mathrm{f}} p$$

となるように選ぶ．また $I_0=\{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\}$ としておく．次の主張を示せばよい．

**主張**　$p$ の解となる $\bar{a}_i\in I_0$ が存在する．

そうでないとすれば，$(p,\varphi)$ の正則性を用いて，$\mathrm{tp}(\bar{a}_i/N\cup\bar{a}_1\hat{}\cdots\hat{}\bar{a}_{i-1})\perp p$ $(i=1,\cdots,n)$．このとき，$i\leq n$ に関する帰納法で，

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/N\cup\bar{a}_1\hat{}\cdots\hat{}\bar{a}_i)\supset_{\mathrm{nf}} p$$

を示すことができる．$i=n$ とすれば，$I_0$ の選び方に矛盾する．　□

**注意191**　弱い意味で正則なタイプ $p$ に対しても上の定理190と同様のことが（命題188の 2 により）証明される．ただし，その場合には $M$ の $\aleph_1$-飽和性を仮定する必要がある．

**定理192**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．

1．正則タイプの集合に対して，非直交関係（$\not\perp$）は同値関係になる．

2．$q$ と $r$ が正則タイプのとき，$p\not\perp q$ かつ $q\not\perp r\Rightarrow p\not\perp r$.

**証明**：2 を示せばよい．平行なタイプで置き換えても非直交性は保存されるので，$p,q,r$ は $\aleph_1$-飽和モデル $N$ 上のタイプとしておく．$\bar{a}$ を $p$ の解として $M$ を $N\cup\bar{a}$ 上の素モデルでなおかつ原子的なものとする（命題67と72参照）．定理190により，$q$ が $M$ で解を持ち，したがって $r$ も $M$ で解を持つ．$\bar{b}\in M$ を $r$ の解とする．$p\not\perp q$ を示すには，次を示せばよい．

**主張**　$\bar{a}\not\downarrow_N\bar{b}$.

$M$ が $N\cup\bar{a}$ 上原子的だから，$\mathrm{tp}(\bar{b}/N\cup\bar{a})$ は孤立的なタイプとなる．$\psi(\bar{x},\bar{a})\in\mathrm{tp}(\bar{b}/N\cup\bar{a})$ を $\mathrm{tp}(\bar{b}/N\cup\bar{a})$ 全体を生成するようにとる．特に，$\psi(\bar{x},\bar{a})$ の解 $\bar{b}'$ が $\bar{b}'\in N$ となることはない．これは $\psi(\bar{x},\bar{a})$ が $N$ 上分岐することを示す．　□

**注意193**　証明の本質は $\aleph_0$-安定性を使って，$N\cup\bar{a}$ の上に「小さな」モデルを作ったことである．$T$ が安定という条件だけで，実は $\aleph_1$-飽和な「小さな」モデルが存在する．このモデルを使うと $\aleph_0$-安定性を仮定せずに上の定理が証明される．

## 7.4　正則タイプの存在

$T$ が $\aleph_0$-安定の場合には正則タイプがかなりたくさん存在する．それを示すのがこの節の目標である．

**定理194（正則タイプの存在定理 I）**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．このとき，任意のモデルの対 $N\prec M, N\neq M$ に対して，$\mathrm{tp}(a/N)$ を正則にする $a\in M-N$ が存在する．

**証明**：$\mathrm{RM}(a/N)$ を最小にする $a\in M-N$ をとり，$p(x)=\mathrm{tp}(a/N)$ とする．また $\varphi(x)\in p(x)$ を，

1．$\mathrm{RM}(\varphi)=\mathrm{RM}(p)$,

2．$\deg(\varphi)=1$

となるように選ぶ．条件1は Morley ランクの定義（論理式のランクによってタイプのランクを定義したこと）による．そのような $\varphi$ に対して，$1<\deg(\varphi)<\omega$ ならば，$\varphi$ に適当に $\psi(x)\in p$ を付け加えればよい（モデル $N$ 上のタイプは定格的なことに注意）．

**主張**　$(p(x),\varphi(x))$ は正則である．

$(p,\varphi)$ が正則でないとすれば，次のような $b,\bar{d}$ がある：

3．$a$ は $p$ の解；

4．$b$ は $\varphi(x)$ の解；

5．$a\downarrow_N\bar{d}$；

6．$\mathrm{tp}(b/N\cup\bar{d})$ は $p$ の非分岐拡大でない．よって，$\mathrm{tp}(a/N\cup\bar{d})\neq\mathrm{tp}(b/N\cup\bar{d})$；

7．$a \not\downarrow_{N\cup\bar{d}} b$．よって，$a \not\downarrow_N \bar{d}^\frown b$．

以下において論理式のパラメータは明示されたもの以外はすべて $N$ の元とする．条件6により，$\theta(z,\bar{d})\in L(N\cup\bar{d})$ を $\mathcal{M}\models\theta(a,\bar{d})\not\leftrightarrow\theta(b,\bar{d})$ となるように選ぶ．また条件7により，$\psi(\bar{y},z,a)\in \mathrm{tp}(\bar{d},b/N\cup\{a\})$ を $N$ 上分岐するようにとる．

$$\mathcal{M}\models\exists z[(\theta(a,\bar{d})\not\leftrightarrow\theta(z,\bar{d}))\wedge\psi(\bar{d},z,a)\wedge\varphi(z)]$$

であるが，$a$ と $\bar{d}$ は条件5により独立だから，$\bar{d}'\in N$ で

$$\mathcal{M}\models\exists z[(\theta(a,\bar{d}')\not\leftrightarrow\theta(z,\bar{d}'))\wedge\psi(\bar{d}',z,a)\wedge\varphi(z)]$$

を満たすものがある．$a^\frown\bar{d}'\in M$ だから，$z$ の解 $b'\in M$ を，

$$M\models(\theta(a,\bar{d}')\not\leftrightarrow\theta(b',\bar{d}'))\wedge\psi(\bar{d}',b',a)\wedge\varphi(b')$$

となるように選べる．しかし，$\psi(\bar{y},z,a)$ が $N$ 上分岐していることと，$\bar{d}'\in N$ とから $b'\in M-N$ でなければならない．$b'$ が $\varphi$ $(\deg(\varphi)=1)$ を満たすことと $p$ のランクの最小性から，$\mathrm{tp}(b'/N)=p=\mathrm{tp}(a/N)$ である．しかし，$M\models\theta(a,\bar{d}')\not\leftrightarrow\theta(b',\bar{d}')$ だから $a$ と $b'$ の $N$ 上のタイプは異なる．これは矛盾である．よって $(p,\varphi)$ は正則でなければならない．　□

**注意195**

1．$M-N$ に解を持つ $\psi(x)\in L(N)$ が最初に与えられたとき，上の定理194で正則タイプを実現する $a\in M-N$ は $\psi$ の解の中から選ぶことができる．証明は $\psi$ の解の中で Morley ランクを最小にする $a\in M-N$ を選べばあとは全く同じ証明法が通じる．

2．$T$ が超安定のとき，$\aleph_1$-飽和な二つのモデル $N\prec M, N\neq M$ の間から $\mathrm{tp}(a/N)$ が弱い意味で正則となる $a$ を選ぶことができる．

定理194よりもさらに強いことが言える．そのための準備として，次の定義と関連した補題を示す．

**定義196**　タイプ $p(\bar{x})$ が集合 $A$ と直交する（orthogonal，記号：$p\perp A$）とは，タ

イプ $p(\bar{x})$ が S$(A)$ に属する任意のタイプと直交することである．

**注意197**　定義から，代数的でないタイプ $p$ が $p\perp A$ を満せば，$p$ は $A$ 上分岐することがわかる：$p$ が分岐していなければ，$q\supset p$, dom$(q)\supset A$ を満たす $A$ 上非分岐な $q$ が存在する．もちろん $p\not\perp q$ である．よって $p\not\perp A$ である．

**問題198**　tp$(A/B\cup C)\perp\emptyset$，tp$(B/C)\perp\emptyset$ $\Rightarrow$ tp$(A\cup B/C)\perp\emptyset$ を示せ．（ヒント：tp$(A\cup B/C)\not\perp\emptyset$ として，$D\supset C$ と $\bar{d}$ を $\bar{d}\downarrow D, A\cup B\downarrow_C D, \bar{d}\not\downarrow_D A\cup B$ となるように選ぶ．このとき，$\bar{d}\not\downarrow_D B$ であるか，$\bar{d}\not\downarrow_{D\cup B} A$ である．前者の場合は tp$(B/C)\not\perp\emptyset$ となる．また後者の場合は tp$(A/B\cup C)\not\perp\emptyset$ となる．）

**補題199（直交性—Morley 列による特徴づけ—）**　$T$ を安定とする．$p, q\in$ S$(A)$ を定格的なタイプとする．このとき次の条件は同値である．

1．$p\perp q$；

2．$p$ の Morley 列 $I$ と $q$ の Morley 列 $J$ に対して，常に $I\downarrow_A J$.

3．$p$ の Morley 列 $I$ と $q$ の Morley 列 $J$ に対して，常に $I\cup J$ は $A$ 上独立.

**証明**：2 と 3 の同値性は明らかである．

**1⇒2.**　1 を仮定する．独立性の定義により，任意の有限 Morley 列に対して条件 2 が成り立つことを示せばよい．これは $|I|+|J|$ に関する帰納法で証明できる．実際，$I=\{\bar{a}\}\cup I_0$, $I_0\neq\emptyset$ としておけば，帰納法の仮定から，$I_0\downarrow_A J$. $\bar{a}$ は $p|(A\cup I_0)$ の解になることがわかる．また $J$ は $q|(A\cup I_0)$ の Morley 列になる．したがって帰納法の仮定により $\bar{a}\downarrow_{A\cup I_0} J$. これと $I_0\downarrow_A J$ により $I\downarrow_A J$ を得る．

**3⇒1.**　3 だが 1 でないとする．$M\supset A$ を $\aleph_1$-飽和モデルとする．このとき定理189により，$\bar{a}$ を $p|M$ の解，$\bar{b}$ を $q|M$ の解として，適当に選べば，

$$\bar{a}\underset{M}{\not\downarrow}\bar{b} \tag{7.3}$$

とできる．$I=\{\bar{a}_i{}^\frown\bar{b}_i : i<\kappa\}$を tp$(\bar{a}^\frown\bar{b}/M)$ の十分長い Morley 列とする．簡単な計算から$\{\bar{a}_i : i<\kappa\}$は $p$ の Morley 列であり，$\{\bar{b}_i : i<\kappa\}$は $q$ の Morley 列であることがわかる．よって条件 3 により，集合$\{\bar{a}_i : i<\kappa\}\cup\{\bar{b}_i : i<\kappa\}$は $A$ 上独立．特に，

$I$ は $A$ 上独立になっている．$\varkappa$ が十分大きいことから問題134により，$I$ の中の $\bar{a}_i$⌢$\bar{b}_i$ で，$M$ と $A$ 上独立になっているものが存在する．したがって，$\bar{a}_i \downarrow_A \bar{b}_i$ により，$\bar{a}_i \downarrow_M \bar{b}_i$ を得る．これは式7.3に矛盾する． □

**補題200** $T$ を安定とする．$B \supset A$，$\mathrm{stp}(B/A) = \mathrm{stp}(B'/A)$[†]，$B \downarrow_A B'$ とする．また定格的なタイプ $p_B \in \mathrm{S}(B)$ のパラメータを対応する $B'$ の元で置き換えたコピーを $p_{B'}$ とする．このとき次が成立する：

$$p_B \perp A \Longleftrightarrow p_B \perp p_{B'}.$$

**証明**：$\Leftarrow$．$p_B \not\perp A$ であって，$p_B \perp p_{B'}$ と仮定して矛盾を導く．$q \in \mathrm{S}(A)$ を $p_B \not\perp q$ となるように選ぶ．$\{B, B'\}$は長さ 2 の（$A$ 上のタイプの）Morley 列をなす．$\{B_i : i < (2^{\aleph_0})^+\}$を $B, B'$ を延長した $A$ 上の Morley 列とする．Morley 列の一様性により，

1．任意の $i$ に対して，$p_{B_i} \not\perp q$.

2．任意の $i \neq j$ に対して，$p_{B_i} \perp p_{B_j}$；

$B_i$ たちをすべて含む $\aleph_1$-飽和モデル $M$ をとる．定理189により，$M$ 上では $\not\perp$ と $\not\perp^{\mathrm{a}}$ は一致する．したがって，上の条件 1 から，$p_{B_i}$ の $M$ 上への非分岐拡大の解 $\bar{a}_i$ と $q$ の $M$ 上への非分岐拡大の解 $\bar{b}_i$ を適当に選べば，

$$\bar{a}_i \not\downarrow_M \bar{b}_i \qquad ({}^{\forall} i < (2^{\aleph_0})^+)$$

となる．系129により，$q$ の非分岐拡大の数は少ない（$\leq 2^{\aleph_0}$）から，$\mathrm{tp}(\bar{b}_i/M)$ はすべて同じと仮定できる．さらに $M$-基本写像で移動することにより，$\bar{b}_i = \bar{b}$（一定）と仮定できる．ここで，$p_{B_i}$ たちが互いに直交すること（条件 2）を用いると，次を得る：

- 全ての $\bar{a}_i$ は $\bar{b}$ と $M$ 上従属的；
- $\{\bar{a}_i : i < (2^{\aleph_0})^+\}$は $M$ 上独立．（問179参照）

† 対応する有限部分の強タイプが常に等しいという意味である．

しかし，これら二つは補題133に矛盾する．

⇒．$I$ を $p_B|(B\cup B')$ の Morley 列，$I'$ を $p_{B'}|(B\cup B')$ の Morley 列とする．補題199により $I\downarrow_{B\cup B'} I'$ を示せばよい．$I\downarrow_B B'$ がすぐわかる．これと $B\downarrow_A B'$ により，$I\cup B\downarrow_A B'$ である．別のことばを使えば，$\mathrm{tp}(I\cup B/B')$ は $A$ 上タイプの非分岐拡大である．よって，$p_{B'}\perp A$ を使うと，$\mathrm{tp}(I\cup B/B')\perp p_{B'}$．$I'$ は $p_{B'}$ の Morley 列でもあるから，$I\cup B\downarrow_{B'} I'$（補題199による）．よって $I\downarrow_{B\cup B'} I'$ を得る．　□

**定理201（正則タイプの存在定理 II）**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．このとき，三つのモデル $N_0\prec N\prec M$, $N\neq M$ に対して，次のような $a\in M-N$ が存在する：

1．$\mathrm{tp}(a/N)$ は正則タイプである；

2．$\mathrm{tp}(a/N)\supset_{\mathrm{nf}}\mathrm{tp}(a/N_0)$ または $\mathrm{tp}(a/N)\perp N_0$.

**証明**：まず $\varphi_0(x)\in L(N_0)$ を $M-N$ に解を持つ $L(N_0)$-論理式の中で最小の Morley ランクを持つように選ぶ．次に $\varphi_0(x)$ を拡大した論理式 $\varphi(x,\bar{d})\in L(N)$ を，$M-N$ に解を持つものの中で Morley ランクを最小にしておく（$\varphi(x,\bar{y})\in L(N_0)$）．またともに次数は１としておく．$a\in M-N$ を $\varphi(x,\bar{d})$ の解としよう．$a$ が求める元である：$\mathrm{tp}(a/N)$ が正則になることは，注意195によりわかる．

3．$\mathrm{tp}(a/N)$ が $N_0$ 上分岐して，なおかつ

4．$\mathrm{tp}(a/N)\not\perp N_0$ である，

と仮定して矛盾を導くことにする．$\mathrm{tp}(a/N)$ は $N_0\cup\bar{d}$ 上分岐しないから，$p_{\bar{d}}=\mathrm{tp}(a/N_0\cup\bar{d})$ も $N_0$ と直交しない．補題200により，$\mathrm{tp}(\bar{d}'/N_0)=\mathrm{tp}(\bar{d}/N_0)$，$\bar{d}'\downarrow_{N_0}\bar{a}^\frown\bar{d}$ となる任意の $\bar{d}'$ に対して，$p_{\bar{d}}\not\perp p_{\bar{d}'}$ である．（$p_{\bar{d}'}$ は $p_{\bar{d}}$ の中のパラメータ $\bar{d}$ をすべて $\bar{d}'$ で置き換えたタイプ．）したがって，補題199によれば，次のような $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$ が存在する：

5．$\{a_1,\ldots,a_m\}$ は $p_{\bar{d}}|(N_0\cup\bar{d}^\frown\bar{d}')$ の Morley 列；

6．$\{b_1,\ldots,b_n\}$ は $p_{\bar{d}'}|(N_0\cup\bar{d}^\frown\bar{d}')$ の Morley 列；

7．$\{a_1,\ldots,a_m\}\not\downarrow_{N_0\cup\bar{d}\cup\bar{d}'}\{b_1,\ldots,b_n\}$.

ただし $m+n$ はこのような中で最小にしておく．また $a_1=a$ としてよい．

**主張 1**　$\mathrm{tp}(a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, \bar{d}'/N_0 \cup \bar{d} \cup \{a\})$ は $N_0 \cup \bar{d}$ 上分岐する．

**主張 1 の証明**：$m+n$ の最小性より，$\{a_2, \ldots, a_m\} \downarrow_{N_0 \cup \bar{d} \cup \bar{d}'} \{b_1, \ldots, b_n\}$が成立．これを使えば条件 7 から簡単な計算によりわかる．　□

**主張 2**　$p_{\bar{d}} | (N_0 \cup \bar{d} \cup \bar{d}')$ は $p_{\bar{d}'}$ の拡張でない．

**主張 2 の証明**：$p_{\bar{d}} | (N_0 \cup \bar{d} \cup \bar{d}')$ の解 $a^*$ が $p_{\bar{d}'}$ の解にもなったとする．$a^* \downarrow_{N_0 \cup \bar{d}} \bar{d}'$ であるが，$\bar{d}$ と $\bar{d}'$ は $N_0$ 上独立だから，$a^* \downarrow_{N_0} \bar{d}'$ を得る．すなわち $p_{\bar{d}'}$ は $N_0$ 上分岐しない．$p_{\bar{d}}$ のコピーが $p_{\bar{d}'}$ だから，$p_{\bar{d}}$ も $N_0$ 上分岐しない．これは我々の仮定 3 に反する．　□

主張 1 と主張 2 により，次のような論理式 $\theta \in L(N_0)$ と $\psi \in L(N_0)$ が存在する：

8．$\mathcal{M} \models \theta(a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, \bar{d}', \bar{d}, a)$；

9．$\theta(x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \bar{z}', \bar{d}, a)$ は $N_0 \cup \bar{d}$ 上分岐する；

10．$\mathcal{M} \models \neg\psi(a, \bar{d}') \wedge \bigwedge_{i=1,\ldots,n} \psi(b_i, \bar{d}')$

また $\theta$ を強めておけば $\theta$ を満たす $y_i$ たちはすべて $\varphi_0$ の解になると仮定できる．さて $\bar{d}' \downarrow_{N_0} \bar{d} \cup \{a, a_2, \ldots, a_m\}$ が簡単な計算からわかる．したがって $\bar{d}'$ を $\bar{d}'' \in N_0$ で取り替えて $(\bar{y} = y_1, \ldots, y_n)$，

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{y} [\theta(a_2, \ldots, a_m, \bar{y}, \bar{d}'', \bar{d}, a) \wedge \neg\psi(a, \bar{d}'') \wedge \bigwedge_{i=1,\cdots,n} \psi(y_i, \bar{d}'')]$$

とできる．次に，$a \downarrow_{N_0 \cup \bar{d}} a_2, \ldots, a_m$ だから，$a_2, \ldots, a_m$ を $a_2', \ldots, a_m' \in N$ で取り替えて，

$$M \models \exists \bar{y} [\theta(a_2', \ldots, a_m', \bar{y}, \bar{d}'', \bar{d}, a) \wedge \neg\psi(a, \bar{d}'') \wedge \bigwedge_{i=1,\cdots,n} \psi(y_i, \bar{d}'')]$$

とできる．さらに，$b_1', \ldots, b_n' \in M$ を $y_1, \ldots, y_n$ の解として，

$$M \models \theta(a_2', \ldots, a_m', b_1', \ldots, b_n', \bar{d}'', \bar{d}, a) \wedge \neg\psi(a, \bar{d}'') \wedge \bigwedge_{i=1,\cdots,n} \psi(b_i', \bar{d}'')$$

となる．条件 9 により，$b_i' \in M - N$ となるものがある（$\because a \downarrow_{N_0 \cup \bar{d}} N$）．$a$ と $b_i'$ は $\psi(x, \bar{d}'')$ によって区別されている．また $\deg(\varphi_0) = 1$ だった．したがって，$\mathrm{tp}(b_i'/N_0)$ の Morley ランクは $\mathrm{tp}(a/N_0)$ の Morley ランクより低くなる．これは $a$ の選び方

に反する．　□

**注意202**　定理201で，$\mathrm{tp}(a/N) \supset_{\mathrm{nf}} \mathrm{tp}(a/N_0)$ の方が成立する場合，$\mathrm{tp}(a/N)$ を正則にする $\varphi$(すなわち $(\mathrm{tp}(a/N), \varphi)$ が正則となる $\varphi$) は $L(N_0)$-論理式としてよい．したがって，$\mathrm{tp}(a/N_0)$ も正則になる．

## 7.5　存在定理の応用

**定義203（支配関係）**　どんな $C$ に対しても，

$$A \underset{B}{\downarrow} C \Rightarrow A^* \underset{B}{\downarrow} C$$

が成立するとき，$A$ は $A^*$ を $B$ 上支配（dominate）するといい，記号 $A \trianglerighteq_B A^*$ で表わす．また $A \trianglerighteq_B A^*$ かつ $A^* \trianglerighteq_B A$ のとき，$A \sqsupseteq_B A^*$ とかく．

**注意204**　次の性質は定義より直ちにでる．

1．関係 $* \trianglerighteq_B *$ は推移率を満たす：$A_1 \trianglerighteq_B A_2, A_2 \trianglerighteq_B A_3 \Rightarrow A_1 \trianglerighteq_B A_3$.

2．タイプ $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ $(B \supset A)$ が集合 $A$ と直交していれば，$B \trianglerighteq_A B \cup \{a\}$が成立する．実際 $B \downarrow_A C$ とすれば，$\mathrm{tp}(C/B) \supset_{\mathrm{nf}} \mathrm{tp}(C/A)$．したがって，$\mathrm{tp}(\bar{a}/B) \perp \mathrm{tp}(C/B)$．特に $\bar{a} \downarrow_B C$．よって $B \cup \{\bar{a}\} \downarrow_A C$ となる．

3．$\bar{a} \trianglerighteq_A \bar{b}$ で $\bar{b} \notin \mathrm{acl}(A)$ ならば，$\bar{a} \not\downarrow_A \bar{b}$ である．

**補題205**　$\mathrm{tp}(\bar{b}/M \cup \bar{a})$が孤立タイプならば，$\bar{a} \trianglerighteq_M \bar{a}^\frown \bar{b}$ である．特に $M^*$ が $M \cup \bar{a}$ 上の原子モデルならば，$\bar{a} \trianglerighteq_M M^*$ が成立する．

**証明**：前半を示せばよい．$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(M)$ を，$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ が $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/M \cup \bar{a})$ を生成するように選んでおく．補題が成立しないとして，$\bar{d}$ を，

- $\bar{d} \downarrow_M \bar{a}$ かつ
- $\bar{d} \not\downarrow_M \bar{a}^\frown \bar{b}$

となるように選ぶ．さらに $\theta(\bar{u}, \bar{a}, \bar{b}) \in \mathrm{tp}(\bar{d}/M \cup \bar{a}^\frown \bar{b})$ $(\theta(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}) \in L(M))$ が $M$ 上分岐するように選ぶ．このとき，

$$\mathcal{M} \vDash \exists \bar{x} [\theta(\bar{d}, \bar{a}, \bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{a})]$$

であるが，$\bar{d}\downarrow_M \bar{a}$ なので，$\bar{d}'\in M$ によって，

$$\mathcal{M}\models \exists\bar{x}[\theta(\bar{d}',\bar{a},\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{a})]$$

とできる．次に $\bar{b}'$ を，

$$\mathcal{M}\models \theta(\bar{d}',\bar{a},\bar{b}')\wedge\varphi(\bar{b}',\bar{a})$$

となるように選ぶ．ところが $\varphi$ の選び方から，$\mathrm{tp}(\bar{b}/M\cup\bar{a})=\mathrm{tp}(\bar{b}'/M\cup\bar{a})$ である．よって，

$$\mathcal{M}\models \theta(\bar{d}',\bar{a},\bar{b})$$

でなければならない．これは $\theta(\bar{x},\bar{a},\bar{b})$ が $M$ 上分岐することに反する． □

次の補題は補題107と形が似ている：

**補題206** $B\supset A, B\downarrow_A \bar{a}\cup\bar{b}$ ならば次が成立する．

$$\bar{a}\trianglerighteq_A\bar{b} \iff \bar{a}\trianglerighteq_B\bar{b}.$$

**証明**：⇒．$\bar{a}\downarrow_B C$ とする．仮定 $\bar{a}\downarrow_A B$ と推移性により，$\bar{a}\downarrow_A B\cup C$ である．ここで $\bar{a}\trianglerighteq_A\bar{b}$ を使えば，$\bar{b}\downarrow_A B\cup C$．よって $\bar{b}\downarrow_B C$ を得る．

⇐．$\bar{a}\downarrow_A C$ とする．$C$ を $A\cup\bar{a}\hat{\ }\bar{b}$–基本写像で移動して，$C\downarrow_{A\cup\bar{a}\hat{\ }\bar{b}} B$ とする．このとき仮定 $B\downarrow_A \bar{a}\cup\bar{b}$ により，$\bar{a}\downarrow_{A\cup C} B\cup C$ が成立している．したがって，推移性により，

$$\bar{a}\underset{A}{\downarrow} B\cup C \qquad \therefore \bar{a}\underset{B}{\downarrow} C$$

である．ここで，$\bar{a}\trianglerighteq_B\bar{b}$ を使えば，$\bar{b}\downarrow_B C$ を得る．再び推移性により，$\bar{b}\downarrow_A C$ を得る．（$C$ の移動が結論に影響しないことに注意する．） □

**定理207（正則分解）** $T$ を $\aleph_0$-安定とする．次の意味において，任意の元は正則な元によって分解される：任意の $\bar{a}$ と $M$ に対して，有限個の $b_1,\ldots,b_n$ を次の3条件を満足するように選ぶことができる：

1．各 $b_i$ は $M$ 上の正則元である．すなわち正則タイプ $r_i\in S_1(M)$ の解である；

2．$\{b_1, .., b_n\}$は $M$ 上独立；

3．$\bar{a} \sqsupseteq_M \{b_1, \ldots, b_n\}$；

**証明**：$M^*$ を $M \cup \bar{a}$ 上の原子モデルとする．$\{b_1, \ldots, b_n\} \subset M^* - M$ を定理の条件1, 2が成立する極大な集合とする．各元 $b_i$ は $\bar{a}$ と $M$ 上従属的だから，定理131により，$n$ は有限である．補題205により，$\bar{a} \trianglerighteq_M \{b_1, \ldots, b_n\}$はよい．いま $B \subset M^*$ を

$$\{b_1, .., b_n\} \trianglerighteq_M B$$

となる極大集合とする．

**主張**　$B$ はモデルである．

**主張の証明**：モデルでなければ，Tarski-Vaught の判定条件により，充足的な $\varphi(x) \in L(B)$ で $B$ に解を持たないものが存在する．$\aleph_0$-安定性により，$\varphi$ は $B$ 上完全な論理式 $\psi \in L(B)$ に拡大できる．$d \in M^* - B$ をその解とすれば，$\mathrm{tp}(d/B)$ は孤立的．したがって，補題205により，$B \trianglerighteq_M B \cup \{d\}$．よって推移性により，$\{b_1, \ldots, b_n\} \trianglerighteq_M B \cup \{d\}$を得る．しかし，これは $B$ の極大性に反する．　□

$B$ が $M^*$ に一致することが示されればよい．一致しないとして矛盾を導く．正則タイプの存在定理 II（定理201）によれば，$e \in M^* - B$ で $\mathrm{tp}(e/B)$ が正則となり，さらに

- $\mathrm{tp}(e/B) \supset_{\mathrm{nf}} \mathrm{tp}(e/M)$ または
- $\mathrm{tp}(e/B) \perp M$

となるものがある．$\mathrm{tp}(e/B) \perp M$ の場合は，$B \trianglerighteq_M B \cup \{e\}$だから，$B$ の極大性に反する．前者の場合は，$\mathrm{tp}(e/M)$ は正則タイプになる．また $e \downarrow_M \{b_1, \ldots, b_n\}$である．これは$\{b_1, \ldots, b_n, e\}$が定理の条件1, 2を満たすことになり，$\{b_1, \ldots, b_n\}$の極大性に矛盾する．　□

**系208**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．$p \not\perp N$ ならば，$p \not\perp r$ となる正則な $r \in S_1(N)$ が存在する．

**証明**：$p$ は $\aleph_1$-飽和モデル $M \succ N$ の上のタイプと仮定してよい．$p \not\perp N$ により，$p$

の解 $\bar{a}$ と適当な元 $\bar{b}$ によって，

- $\bar{a} \not\downarrow_M \bar{b}$；
- $\mathrm{tp}(\bar{b}/M) \supset_{\mathrm{nf}} \mathrm{tp}(\bar{b}/N)$

となっている．$\bar{b}$ を $N$ 上で分解すれば，$N$ 上の独立な正則元たち$\{d_1, \ldots, d_n\}$によって，$\bar{b} \mathrel{\underline{\square}}_N \{d_1, \ldots, d_n\}$である．ここで $d_1, \ldots, d_n$ たちを $N \cup \bar{b}$–基本写像で移動して，$\bar{b} \cup \{d_1, \ldots, d_n\} \downarrow_N M$ としておけば，補題206により，

$$\bar{b} \mathrel{\underline{\square}}_M \{d_1, \ldots, d_n\}$$

を得る．これと $\bar{a} \not\downarrow_M \bar{b}$ により，$\bar{a} \not\downarrow_M \{d_1, \ldots, d_k\}$となる最小の $k$ が存在する．この $k$ に対して，$\mathrm{tp}(\bar{a}/M) \not\perp \mathrm{tp}(d_k/M)$である．よって $\mathrm{tp}(\bar{a}/M) \not\perp \mathrm{tp}(d_k/N)$である． □

「直交」と「ほとんど直交」の二つの概念が $\aleph_1$-飽和モデルの上で一致することは定理189ですでに証明してある．$\aleph_0$-安定性のもとではさらに強いことが成り立つ．

**定理209（モデル上の直交関係）**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．$p, q \in \mathrm{S}(M)$ に対して，

$$p \perp q \Longleftrightarrow p \perp^{\mathrm{a}} q$$

が成立する．

**証明：第１段階.**　$p$ と $q$ がともに正則な場合に定理を証明する．$\Leftarrow$が本質的である．対偶を示すことにする．$p \not\perp q$ とすれば，$p|(M \cup \bar{d}) \not\perp^{\mathrm{a}} q|(M \cup \bar{d})$ となるように $\bar{d}$ が選べる．この関係を実現する元 $\bar{a}$，$\bar{b}$ をとる：

1．$\bar{a}$ は $p|(M \cup \bar{d})$ の解，$\bar{b}$ は $q|(M \cup \bar{d})$ の解；
2．$\bar{b}^\frown \bar{d} \not\downarrow_M \bar{a}$.

以下では明示されないパラメータは $M$ の元とする．条件２により，$\theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{a}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}^\frown \bar{d}/M \cup \bar{a})$ を $M$ 上分岐するようにとる．

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{y}[\theta(\bar{y}, \bar{d}, \bar{a}) \wedge \varphi(\bar{y})]$$

である．ただし，$\varphi$ は $(q, \varphi)$ を正則にする $L(M)$–論理式である．次が順に成立す

る：

$$\mathcal{M} \vDash \exists \bar{y}[\theta(\bar{y}, \bar{d}', \bar{a}) \wedge \varphi(\bar{y})] \quad ({}^{\exists}\bar{d}' \in M) \quad \because\ \bar{d} \downarrow_M \bar{a}$$
$$\mathcal{M} \vDash [\theta(\bar{b}', \bar{d}', \bar{a}) \wedge \varphi(\bar{b}')] \quad ({}^{\exists}\bar{b}' \in \mathcal{M})$$

しかし $\theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{a})$ は $M$ 上分岐するから，$\bar{a} \not\downarrow_M \bar{b}'$ である．よって $\mathrm{tp}(\bar{b}'/M) \not\perp p$ である．また $p \not\perp q$ だったから，非直交関係の推移性（定理192）により，$\mathrm{tp}(\bar{b}'/M) \not\perp q$ である．もし $\mathrm{tp}(\bar{b}'/M)$ が $q$ に一致しなければ，正則性により，

$$\mathrm{tp}(\bar{b}'/M) \perp q$$

となってしまうので，$\mathrm{tp}(\bar{b}'/M) = q$．したがって $p \not\perp^{\mathrm{a}} q$（$\bar{a} \not\downarrow_M \bar{b}'$ による）を得る．

**第2段階**：一般の場合．同様に $\Leftarrow$ の対偶を示す．$\mathrm{tp}(\bar{a}/M) = p, \mathrm{tp}(\bar{b}/M) = q$，$p \not\perp q$ とする．$\bar{a}$ と $\bar{b}$ を $M$ 上の独立な正則元たち $\bar{d} = d_1, \ldots, d_m$ と $\bar{e} = e_1, \ldots, e_n$ で正則分解しておく．$M^* \succ M$ を $\aleph_1$-飽和モデルとして，$M^* \downarrow_M \bar{a}^\frown \bar{d}^\frown \bar{b}^\frown \bar{e}$ となるように選んでおく．補題206により，

$$\bar{a} \sqsubset_{M^*} \bar{d} \text{ かつ } \bar{b} \sqsubset_{M^*} \bar{e} \tag{7.4}$$

が成立している．$p|M^* \not\perp^{\mathrm{a}} q|M^*$ により，$\bar{a}^\frown \bar{d}$ を $M^*$-基本写像で移動することにより，

$$\bar{a} \underset{M^*}{\not\downarrow} \bar{b}$$

と仮定できる．（式7.4は不変である．）よって $\bar{d} \underset{M^*}{\not\downarrow} \bar{e}$ である．したがって，$i \le m$ と $j \le n$ が存在して，

$$\mathrm{tp}(d_i/M^*) \not\perp \mathrm{tp}(e_j/M^*) \quad \therefore\ \mathrm{tp}(d_i/M) \not\perp \mathrm{tp}(e_j/M)$$

となる．第1段階で，モデル上の正則タイプについては $\not\perp$ と $\not\perp^{\mathrm{a}}$ の一致が示されているので，

$$\mathrm{tp}(d_i/M) \not\perp^{\mathrm{a}} \mathrm{tp}(e_j/M)$$

である．よって，$M$-基本写像 $\sigma$ で $e_j$ を動かして，$d_i \not\downarrow_M \sigma(e_j)$ とできる．このとき，

$\bar{a} \sqsubseteq_M \bar{d}$ と $\sigma(\bar{b}) \sqsubseteq_M \sigma(\bar{e})$ によって, $\bar{a} \not\downarrow_M \sigma(\bar{b})$ を得る. これは $p \not\perp^{\mathrm{a}} q$ を意味する. □

# Ⅲ　いくつかの話題

# 第8章　Zilber の既約性定理

この章では，何も断わらなければ，$G$ は $\aleph_0$-安定な(無限)群とする．また $L=\{e, *\cdot *, *^{-1}\}$として，$G$ を $L$-構造と考える．$A\subset G^n=\overbrace{G\times\cdots\times G}^{n}$が定義可能(definable)[†]であるとは，$A=\{\bar{a}\in G^n : G\models\varphi(\bar{a})\}$となる論理式 $\varphi(\bar{x})\in L(G)$ が存在することである．定義可能な部分集合はある意味で具体的な集合であり，その数も限られている．実際，$G$ の部分集合全体は $2^{|G|}$ だけあるが，定義可能な部分集合は論理式の数 $|L(G)|=|G|$ だけしか存在しない．また $A$ が定義可能であっても $A$ で生成される部分群 $\langle A\rangle$ は必ずしも定義可能にはならない．それは $g\in\langle A\rangle$ を作るのに要する $A$ の元の個数が上から抑えられるとは限らないためである．例えば加法群 $\mathbb{Q}$ において 1 で生成される部分群 $\mathbb{Z}$ は定義可能にはならない．Zilber の既約性定理は，ある条件のもとに

$$A \text{ が定義可能} \Rightarrow \langle A\rangle \text{ が定義可能}$$

となることを示すものである．

## 8.1　$\aleph_0$-安定な群の基本的性質

**命題210**　$G$ には定義可能な部分群の真の無限下降列$\{G_i : i<\omega\}$は存在しない．

**証明**：対偶を示す．$G_i$ $(i<\omega)$ を定義可能な部分群の真の無限下降列とする：

$$G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_n\supset\cdots$$

$a_\eta\in G$ $(\eta\in 2^{<\omega})$ を以下のように作る： まず $a_\phi=e$ とする．各 $\eta\in 2^n$ に対して，$a_\eta$ が定まったとする． $a_\eta\cdot G_n$ は $G_n$ の左剰余類 (left coset) だから，$G_{n+1}$ の異なる左剰余類を少なくとも二つ含む．これらを $a_{\eta^\frown 0}\cdot G_{n+1}$ と $a_{\eta^\frown 1}\cdot G_{n+1}$ とする．

† タイプの定義可能性と混同してはならない．

以下同様にこの作業を続けてゆく．このとき各 $\nu\in 2^{\omega}$ に対して，無限下降列：

$$a_{\phi}\cdot G_0 \supset a_{\nu|1}\cdot G_1 \supset \cdots \supset a_{\nu|n}\cdot G_n \supset \cdots$$

を得る．論理式の集合 $\{x\in a_{\nu|n}\cdot G_n : n<\omega\}$ は有限充足的となり，タイプ $p_{\nu}(x)\in S(A)$ に拡大される．（$A$ は $a_{\eta}$ たちと，$G_n$ を定義するために必要なパラメータ全体.）異なる $\nu\neq\nu'$ に対応する $p_{\nu}$ と $p_{\nu'}$ は異なる左剰余類を含むから異なるタイプである．したがってこれらは $2^{\aleph_0}$ 個ある．一方 $A$ は可算である．このことは $G$ が $\aleph_0$-安定でないことを意味する．　□

次の系は明らかだろう：

**系211**　$G_i$ $(i\in I)$ を $G$ の定義可能な部分群とする．$\bigcap_{i\in I} G_i$ は実は適当な有限個の共通部分 $G_{i_0}\cap\cdots\cap G_{i_n}$ に等しく，再び定義可能となる．

**系212**　$A\subset G$ を含む最小の定義可能な部分群が存在する．

**注意213**　$G$ が安定という仮定だけでは，系212は成立しない．しかし，$G_i$ たちがすべて一様に定義されている（すなわち $G_i$ たちを定義している論理式がすべて同じ形 $\varphi(x,\bar{a}_i)$ の）場合は正しい (Baldwin-Saxl)．これは次のように示される．$\varphi^*(x,u,\bar{v})$ を $\varphi(u\cdot x,\bar{v})$ として，$(\varphi^*,2)$-ランクを考える．このランクでは元を左からかける移動によってランクが不変である．補題84により，$m=\mathrm{R}(\{\varphi(x,\bar{a}_i) : i\in I\},\varphi^*,2)=\mathrm{R}(\{\varphi(x,\bar{a}_i) : i\in I_0\},\varphi^*,2)$ となる有限の $I_0\subset I$ を選ぶ．このとき，$\bigcap_{i\in I}G_i=\bigcap_{i\in I_0}G_i$ が成立することを示そう：$G_k$ が$\bigcap_{i\in I_0}G_i$ を分割していたとしよう．$\{\varphi(x,\bar{a}_i) : i\in I_0\cup\{k\}\}$のランクまたは$\{\varphi(x,\bar{a}_i) : i\in I_0\}\cup\{\neg\varphi(x,\bar{a}_k)\}$のランクのどちらかは $m$ 未満である．しかし $I_0$ の定義から前者は $m$ である．したがって後者が $m$ 未満でなくてはならないが，後者は前者を移動させた集合を含んでいる．これは矛盾である．

**定理214**　$A\subset G$ に対して，$A$ と交換可能な元全体 $C_G(A)$ は $G$ の定義可能な部分群となる．

**証明**：$C_G(A)=\bigcap_{a\in A} C_G(a)$ であり，各 $C_G(a)$ は定義可能だから，系211により

定義可能となる．

**定義215**　$p \in S_1(G)$ と $\varphi(x, \bar{y}) \in L$ に対して，

1．$\mathrm{stab}(p, \varphi) = \{g \in G : \varphi(a \cdot x, \bar{b}) \in p \Longleftrightarrow \varphi(a \cdot g^{-1} \cdot x, \bar{b}) \in p\ (\forall a, \bar{b} \in G)\}$；

2．$\mathrm{stab}(p) = \{g \in G : \psi(x) \in p \Longleftrightarrow \psi(g^{-1} \cdot x) \in p\ (\forall \psi(x) \in L(G))\}$.

$\mathrm{stab}(p)$ を $p$ の安定化群（stabilizer）という．

**定義216**　$\mathrm{stab}(p) = \bigcap_{\varphi \in L} \mathrm{stab}(p, \varphi)$.

**証明**：（⊂）はよい．また逆（⊃）も，$G \models \forall x[\varphi(x, \bar{b}) \longleftrightarrow \varphi(e \cdot x, \bar{b})]$ が成立することに注意すれば明らか．

**注意217**　$\mathrm{stab}(p)$ の定義に比べて，$\mathrm{stab}(p, \varphi)$ の定義は多少複雑になっているが，これは $\mathrm{stab}(p, \varphi)$ を群にするためである．$\mathrm{stab}(p, \varphi) = \{g \in G : \varphi(x, \bar{b}) \in p \Longleftrightarrow \varphi(g^{-1} \cdot x, \bar{b}) \in p\ (\forall \bar{b} \in G)\}$としたのでは群になることがうまく証明できない．

$p \in S_1(G)$ と $g \in G$ に対して，$g \cdot p = \{\varphi(g^{-1} \cdot x) : \varphi(x) \in p\}$とする．$g \cdot p$ 自体は完全ではないが，$G$ 上のタイプを生成している．このタイプも $g \cdot p$ で表わすことにすれば，

$$g \in \mathrm{stab}(p) \iff g \cdot p = p$$

が成立する．また $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(g \cdot p)$ である．これは $\varphi(x)$ が $\theta_i(x)$ たちにより分割されれば，$\varphi(g^{-1} \cdot x)$ が $\theta_i(g^{-1} \cdot x)$ により分割されるからである．

**命題218**　$\mathrm{stab}(p, \varphi)$ は $G$ の定義可能な部分群である．

**証明**：部分群になることはほとんど明らかである．定義可能なことを示せばよい．$\varphi^*(x, u, \bar{v}) = \varphi(u \cdot x, \bar{v})$ として，$\theta(u, \bar{v}) \in L(G)$ が $p|\varphi^*$ を定義しているとする．すなわち，$\varphi^*(x, a, \bar{b}) \in p \Longleftrightarrow G \models \theta(a, \bar{b})$（$\forall a, \bar{b} \in G$）を成立させる論理式とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{stab}(p, \varphi) &= \{g \in G : \varphi(a \cdot x, \bar{b}) \in p \Longleftrightarrow \varphi(a \cdot g^{-1} \cdot x, \bar{b}) \in p\ (\forall a, \bar{b} \in G)\} \\ &= \{g \in G : G \models (\forall u, \bar{v})[\theta(u, \bar{v}) \longleftrightarrow \theta(u \cdot g^{-1}, \bar{v})]\}.\end{aligned}$$

最後の集合は定義可能だから $\mathrm{stab}(p, \varphi)$ が定義可能なことがわかる．　□

系211を用いると，以上から次の定理を得る．

**定理219**　stab$(p)$ は $G$ の定義可能な部分群である．

## 8.2　Zilber の既約性定理

$A\subset G$ が定義可能だとしても，$A$ から生成された部分群$\langle A\rangle$が定義可能とは限らない．しかし，ある条件のもとでは正しくなる．これが Zilberの 既約性定理である．

集合の直積と区別するために $\overbrace{A\cdot\ \cdots\ \cdot A}^{n}=\{a_1\cdot\ \cdots\ \cdot a_n : a_i\in A\}$を $A^{(n)}$ とかくことにする．

**定義220**　定義可能な $G$ の部分集合 $A\neq\emptyset$が既約（indecomposable）であるとは，任意の定義可能な部分群 $H\subset G$ に対して次が成立することである：

$$A \text{ が有限個の } H \text{ の左剰余類で覆われる } (|A/H|<\omega)$$
$$\Rightarrow A \text{ は丁度 1 個の } H \text{ の左剰余類に含まれる } (|A/H|=1).$$

群 $G$ 自体が既約なとき，$G$ は連結（connected）であるという．

**問題221**　次を示せ．

1．有限集合が既約になるのは一点だけからなる集合の場合である．

2．$G$ が連結でないとき，分解 $G=g_1\cdot N\cup\cdots\cup g_n\cdot N$ において，$N\neq G$ を $G$ の定義可能な正規部分群としてとれる．

（ヒント：$G$ が連結でないとき，$1<|G/H|<\omega$ となる $G$ の定義可能部分群 $H$ が存在する．いま $N=\bigcap_{g\in G}H^{g}$†は $G$ の正規部分群であるが，実はこれは有限個の共通部分$\bigcap_{i=1,\dots,n}H^{g_i}$ に等しい．したがって，$N$ は定義可能であり，さらに$|G/N|\leq\prod_{i=1,\dots,n}|G/H^{g_i}|=|G/H|^n<\omega$ が成立する．）

**定理222（Zilber の既約性定理（簡略形））**　$G$ を Morley ランク有限の群とする．単位元 $e$ を含む定義可能な集合 $A\subset G$ が既約ならば $\langle A\rangle$ は定義可能で既約になる．（さらに $\langle A\rangle=A^{(n)}\cdot(A^{(n)})^{-1}$ の形をしていることもわかる．）

† $h^g=g^{-1}\cdot h\cdot g, H^g=\{h^g : h\in H\}$

**証明**：$\mathrm{RM}(G)<\omega$ から，$A^{(n)}$ $(n\in\omega)$ たちの中で最大ランクのものが存在する．それを $A^{(n)}$ として，$RM(A^{(n)})=m$ とする．論理式「$x\in A^{(n)}$」をタイプ $p(x)\in S(G)$ にMorley ランクを変えないで拡大する：

$$RM(x\in A^{(n)})=RM(p(x)).$$

**主張 1**　$A\subset\mathrm{stab}(p)$.

主張 1 の証明：そうでなければ，$A$ が既約だから，定義可能な群 $\mathrm{stab}(p)$ で $A$ を覆うためには無限個の左剰余類を必要とする（$e\in A$ を使った）．したがって $g_k\cdot\mathrm{stab}(p)$ （$g_k\in A, k=1,2,\cdots$）たちを異なる左剰余類となるように選べる．これを安定化群の定義にもどって書き直せば，

$$g_k\cdot p=\{\varphi(g_k^{-1}\cdot x):\varphi(x)\in p(x)\}\quad(k=1,2,\cdots)$$

たちが異なるタイプとなることがわかる．一方，$g_k\in A$ により，「$x\in A\cdot A^{(n)}$」$\in g_k\cdot p(x)$．したがって，$A^{(n+1)}=A\cdot A^{(n)}$ は Morley ランクが $m$ の無限個のタイプ $g_k\cdot p(x)$ に分かれる．このことは $RM(x\in A^{(n+1)})\geq m+1$ を示す．すなわち $m$ の最大性に反する．　□

上の主張 1 と $\mathrm{stab}(p)$ が群であることから，

**主張 2**　$\langle A\rangle\subset\mathrm{stab}(p)$.

**主張 3**　$\mathrm{stab}(p)\subset A^{(n)}\cdot(A^{(n)})^{-1}$.

主張 3 の証明：$g\in\mathrm{stab}(p)$ とすれば，「$x\in A^{(n)}$」と「$x\in g\cdot A^{(n)}$」はともに $p$ に入る．したがって，

$$A^{(n)}\cap g\cdot A^{(n)}\neq\emptyset.$$

すなわち，$a,b\in A^{(n)}$ をとって，$a=g\cdot b$（$\therefore g=a\cdot b^{-1}$）とできる．　□

以上から，$\langle A\rangle=A^{(n)}\cdot(A^{(n)})^{-1}$ となり，$\langle A\rangle$ が定義可能なことがわかった．$\langle A\rangle$ が既約なことはすぐにわかる．実際，定義可能な部分群 $K$ の左剰余類によって $\langle A\rangle$ が有限個で覆われていれば，$A$ 自体も覆われている．したがって，$A$ が既約なこ

とと，$e \in A$ から，$A \subset K$．よって $\langle A \rangle \subset K$ となる．　□

上の定理は一つの $A$ でなく，任意個数の既約な集合 $A_i$ $(i \in I)$ の場合に拡張できる．証明はほとんど同じである．

**定理223 (Zilber の既約性定理)**　$G$ を Morley ランク有限の群とする．$e$ を含む定義可能な集合たち $A_i \subset G$ $(i \in I)$ がすべて既約ならば $\langle A_i : i \in I \rangle$ は定義可能かつ既約である．

## 8.3　既約性定理の応用

**定理224**　$G$ は Morley ランクが有限の群とする．$H \subset G$ を定義可能で既約な部分群とする．また $A \subset G$ を勝手な部分集合とする．このとき，$[A, H] = \langle [a, h] : x \in A, h \in H \rangle$ は定義可能で既約となる．ただし $[a, h]$ は $a$ と $h$ の交換子 $a^{-1} \cdot h^{-1} \cdot a \cdot h$ である．

**証明**：$[A, H] = \langle a^{-1} \cdot a^H : a \in A \rangle$ である．また各 $a^{-1} \cdot a^H$ は $e$ を含む定義可能な $G$ の部分集合．したがって，これが既約なことを示せば，Zilber の定理（定理223）を適用することができる．$a^H$ が既約なことを示そう．

$$a^H \subset g_1 \cdot K \cup \cdots \cup g_m \cdot K \tag{8.1}$$

となる定義可能な部分群 $K$ が存在したとする．$\aleph_0$-安定の仮定から，$H$ に関して正規な部分群 $K^* = \bigcap_{h \in H} K^h$ は有限個の共通部分 $K^{h_1} \cap \cdots \cap K^{h_n}$ に等しい．式 8.1において，$h_i$ を肩にかければ

$$a^H \subset g_1^{h_i} \cdot K^{h_i} \cup \cdots \cup g_m^{h_i} \cdot K^{h_i} (i = 1, \cdots, n)$$

を得るが，これから，

$$a^H \subset \bigcap_{i=1,\cdots,n} (g_1^{h_i} \cdot K^{h_i} \cup \cdots \cup g_m^{h_i} \cdot K^{h_i}).$$

さらに右辺を分解すれば（$\cup$ と $\cap$ の順序を入れ換えて），

$$a^H \subset a_1 \cdot K^* \cup \cdots \cup a_k \cdot K^* \quad ({}^\exists a_i \in a^H) \tag{8.2}$$

の形の被覆を得る．$k$ はこのような被覆があるような最小数としておく．

$$H_0=\{h\in H:(a_i\cdot K^*)^h=a_i\cdot K^*\ (i=1,\cdots,k)\}$$

と定義すれば，これは $H$ の部分群である．上の被覆の存在8.2とその最小性により，勝手な $h\in H$ に対して，$(a_i\cdot K^*)^h$ はどれかの $a_j\cdot K^*$ に一致する．したがって $|H/H_0|$ は有限となる．さらに $H$ が既約なことより，$H_0=H$ となる．これから，

$$\begin{aligned} a^H &\subset {a_1}^H \qquad (\because a_1\in a^H)\\ &\subset (a_1\cdot K^*)^{H_0}\\ &\subset a_1\cdot K^*\\ &\subset a_1\cdot K \end{aligned}$$

を得る．すなわち $a^H$ は既約である．したがって $a^{-1}\cdot a^H$ も既約になる．

**定理225** $G$ を有限 Morley ランクを持つ非可換群とする．$G$ の定義可能な正規部分群がすべて自明ならば，$G$ は単純群[†]である．

**証明**：問題221の議論により，$G$ は連結になる．いま $N$ を $G$ の正規部分群とする．示すべきは「$N=\{e\}$または $N=G$」となることである．定理224によれば，$[G,N]$ は $G$ の定義可能な正規部分群となる．仮定から，$[G,N]=\{e\}$または $[G,N]=G$ である．前者の場合には $N\subset Z(G)$[‡] である．$G$ が非可換なことと，$G$ の仮定により，$Z(G)=\{e\}$である．したがって，$N=\{e\}$を得る．後者の場合には（$[G,N]\subset N$により）$N=G$ である． □

**系226（単純性の保存）** $G$ を有限 Morley ランクを持つ群とする．$G$ が単純ならば，$G'\equiv G$ となるすべての群 $G'$ は単純である．

**証明**：当然 $G'$ も有限 Morley ランクを持つ群である．もし $G'$ が単純群でなければ，上記の定理により，自明でない定義可能な正規部分群 $N'$ を持つ．$N'$ は論理式 $\varphi(x,\bar{g}')$ によって定義されているとしよう．

† 正規部分群が自明（全体か単位元だけ）になる群を単純群という．
‡ $Z(G)$ は $G$ の中心（すべての元と交換可能な元全体）を表わす．

$$G' \models \text{「}\varphi(x, \bar{g}')\text{ は自明でない正規部分群」}$$

である．$G \equiv G'$ によって，パラメータ $\bar{g} \in G$ を選べば，

$$G \models \text{「}\varphi(x, \bar{g})\text{ は自明でない正規部分群」}$$

となり，矛盾を得る．　□

# 第9章　飽和モデルと素モデル

飽和モデルの存在と素モデルの一意性を示すのが本章の目的である．正則な基数 $\lambda$ で $T$ が安定ならば，濃度 $\lambda$ の飽和モデルが存在することは比較的簡単に示せる．実際 $\aleph_0$-安定な理論の可算の飽和モデルの存在証明（定理73）と同様の議論をすればよい．正則でない場合が問題となるが，その場合にも安定性理論を使って存在が証明される．

素モデルの一意性は可算で安定な理論について証明できるが，本書では $T$ が $\aleph_0$-安定の場合に示すことにする．証明には（Shelah による）いくつかの方法が知られている．ここではそのうちの二つの紹介をしたい．一つは Morley ランクに関する帰納法を用いる証明法であり，もう一つは濃度に関する帰納法を用いる証明法である．

## 9.1　飽和モデル

**定理227（飽和モデルの存在）**　$T$ が $\lambda$-安定ならば，$T$ は濃度 $\lambda$ の飽和モデルを持つ．

**証明**：(i)　$\lambda$ が正則のとき．濃度 $\lambda$ のモデル $M$ が与えられたとき，$\mathrm{S}(M)$の濃度は $\lambda$ である．各 $p\in\mathrm{S}(M)$に対してその解 $a_p$ を一つずつ選んでおく．$M\cup\{a_p : p\in\mathrm{S}(M)\}$ を含むモデル $N$ で濃度が $\lambda$ のものが存在する．$N$ では $\mathrm{S}(M)$ のすべてのタイプが解をもつ．以上のことに注意してモデルの基本拡大の列 $\{M_i : i<\lambda\}$ を，$\mathrm{S}(M_i)$ のすべてのタイプは $M_{i+1}$ に解を持つようにつくる．このとき $M=\bigcup_{i<\lambda}M_i$ とすれば $M$ が求める飽和モデルである：$|M|=\lambda$ は明らかである．次に $A\subset M$ が $|A|<\lambda$ のとき，$\lambda$ が正則なことから，$A\subset M_i$ となる $i<\lambda$ が存在．したがって $\mathrm{S}(A)$ は $M_{i+1}\prec M$ に解を持つ．

(ii)　$\lambda$ が正則でないとき．$\lambda$ に収束する単調増加列 $\lambda_i$ $(i<\mathrm{cf}(\lambda))$ をとる．

モデルの基本拡大列 $\{M_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ を，各 $i < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して，

1．$|M_i| \leq \lambda$；

2．各 $p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(M_i)$ の長さ $\lambda$ の Morley 列が $M_{i+1}$ の中に存在する，

となるように作っておく．$M = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} M_i$ とすれば，$M$ が求める飽和モデルである：$A \subset M$ を濃度が $\lambda_i$ 以下の集合とする．$p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ に対して，$p$ の $M$ への一つの非分岐拡大 $q$ をとる．まず $q$ が $M_j$ 上分岐しないように $j < \mathrm{cf}(\lambda)$ がとれたとする．$j \geq i$ と仮定できる．定格的なタイプ $q|M_j$ の長さ $\lambda$ の Morley 列 $I$ が $M$ の中に存在するから，$\bar{a} \in I$ で $a \downarrow_{M_j} A$ となるものがとれる．（問題133参照.）このとき $\bar{a}$ は $q|(M_j \cup A)$ の解となり，したがって $p$ の解となる．次にどの $M_j$ 上も $q$ が分岐している場合を考える．（実はこの場合はないことが示される.）長さ $\mathrm{cf}(\lambda)$ の分岐拡大列 $\{q_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ が存在している．$\kappa$ を $\lambda^\kappa > \lambda$ が成立する最小の基数とする．もちろん $\kappa \leq \mathrm{cf}(\lambda)$ だから，$\{q_i : i < \kappa\}$ は分岐拡大列である．したがって，補題127により，濃度 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ の集合の上に $\lambda^\kappa > \lambda$ 個の異なるタイプを作ることができる．これは $T$ が $\lambda$-安定なことに反する．　□

**注意228**　飽和モデルは濃度さえ決まれば一意的である．（問題51参照.）

## 9.2　素モデルの一意性

$T$ が $\aleph_0$-安定のとき，任意の $A$ 上に素モデル（それは原子モデルになる）が存在することはすでに示した．ここではその一意性を示す．

**定理229（素モデルの一意性）**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．各 $A$ 上に（$A$ 上同型を除いて）ただ一つの素モデルが存在する．

この定理を示すのが本節の目標である．

記法：列 $\{x_i : i \in I\}$ と $F = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset_{\mathrm{fin}} I$ に対して，$\bar{x}_F = x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ とする．

**定義230（構成列）**

1．各 $i < \alpha$ に対して，$a_i$ を $\mathcal{M}$ の元，$x_i$ を変数記号とする．対

$$(\{a_i\}_{i<\alpha}, \{\varphi(x_i, \bar{x}_{F_i})\}_{i<\alpha})$$

が $A$ 上の構成列（construction）であるとは，各 $i<\alpha$ に対して次が成立することである：

(a) $F_i \subset i$；

(b) $\varphi(x, \bar{x}_{F_i}) \in L(A)$；

(c) $p(x_i) = \mathrm{tp}(a_i/A_i)$ は $\varphi(x_i, \bar{a}_{F_i})$ によって生成されている．ただし $A_i = A \cup \{a_j\}_{j<i}$ である．

2．$B$ が $A$ 上構成可能（constructible）であるとは，$B = A_\alpha$ となる $A$ 上の構成列 $(\{a_i\}_{i<\alpha}, \{\varphi(x_i, \bar{x}_{F_i})\}_{i<\alpha})$ が存在することである．

3．1の構成列に対して，$C \subset A_\alpha$ が閉じているとは，条件：

$$a_i \in C \Rightarrow \bar{a}_{F_i} \subset C$$

を満たすときである．

4．$B \subset A_\alpha$ を含む最小の閉じた集合を $\langle B \rangle$ とかく．

**注意231**　$\mathrm{tp}(a_i/A \cup \{a_j\}_{j<i})$ が各 $i<\alpha$ で孤立的ならば，$A_\alpha$ は構成的になる．構成列は列$\{a_i\}_{i<\alpha}$ に孤立性を保証する論理式を付け加えた対である．$B$ が $A$ 上構成可能ならば，任意の $\bar{b} \in B$ に対して，$\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ は孤立的になる．証明は命題72の証明と同様である．

$A$ 上の構成列 $(\{a_i\}_{i<\alpha}, \{\varphi(x_i, \bar{x}_{F_i})\}_{i<\alpha})$ を一つ固定する．

**補題232**

1．$\langle B \rangle$は帰納的に

(a) $B_0 = B$, $B_{n+1} = \bigcup_{a_i \in B_n} \bar{a}_{F_i}$；

(b) $\langle B \rangle = \bigcup_{n \in \omega} B_n$

と定義したものと同じになる．

2．$\langle B \rangle = \bigcup_{b \in B} \langle b \rangle$；

3．$\langle a \rangle$は有限集合である．したがって2と合わせると $B$ が有限ならば$\langle B \rangle$も有

限である．

**証明**：1，2は明らかである．3は König の補題による．[†] □

**補題233**　$C \subset A_\alpha$ を閉じた集合とする．このとき，

1．$A \cup C$ は $A$ 上構成可能である；

2．$A_\alpha$ は $A \cup C$ 上構成可能である．

**証明**：

1．$C$ の下から $i$ 番目の元を $a_{f(i)}$ とするとき，適当な $\alpha' \leq \alpha$ によって，

$$(\{a_{f(i)}\}_{i<\alpha'}, \{\varphi(x_{f(i)}, \bar{x}_{F_{f(i)}})\}_{i<\alpha'})$$

が $A \cup C$ の構成列となる．

2．$\beta < \alpha$ を固定しよう．$a_\beta \in A_\alpha$ として，$C^* = C \cup A_\beta$ とするとき，$\mathrm{tp}(a_\beta / C^*)$ が孤立的なことを示せばよい．$a_\beta \in C^*$ のときは明らかなので，$a_\beta \notin C^*$ とする．$C^*$ 及び $C^* \cup \{a_\beta\}$ は閉じていることに注意する．したがって1により $A$ 上構成可能．特に，

$$\Phi(\{x_i : a_i \in C^* \cup \{a_\beta\}\}) = \{\varphi(x_i, \bar{x}_{F_i}) : a_i \in C^* \cup \{a_\beta\}\}$$

は $\mathrm{tp}(C^* \cup \{a_\beta\}/A)$ を生成する．ここで $\Phi$ の中の $x_\beta$ 以外の $x_i$ に $a_i$ を代入した $\Phi(\{x_\beta\} \cup C^*)$ は $\mathrm{tp}(a_\beta / C^*)$ を生成している．$C^*$ も閉じているから，$\Phi(\{x_\beta\} \cup C^*)$ の中で自由変数が生き残る論理式はただ一つ $\varphi_\beta(x_\beta, \bar{a}_{F_\beta})$ しかない．　□

モデル $M \supset A$ が $A$ 上構成可能ならば，それは素モデルになっていることがわかる．実際素モデルの存在証明（定理67）では $A$ 上の構成列を作っているわけである．

**命題234（素モデルと一様列）**　$T$ を $\aleph_0$-安定とする．また $M$ を $A$ 上の素モデルとする．このとき，

1．$M$ は $A$ 上の原子モデルである；

2．$M$ の中にある $A$ 上の一様集合 $I$ は高々可算である．[‡]

---

[†] そんなこと言わないでも考えればすぐわかる．

[‡] $I = \{\bar{a}_i : i < \kappa\}$ において $\kappa$ が可算という意味ではない．集合 $I$ が可算という意味である．もちろん同一元の繰り返し（$\bar{a}_i = \bar{a}$）の場合は $\kappa$ はいくらでも大きくできる．

**証明**：$A$ 上の素モデル $M$ は $A$ 上構成可能なモデル $M^*$ の中に埋め込める．$M^*$ が条件 1，2 を満足したとすれば，それよりも小さい $M$ も 1，2 を満足するので，はじめから $M$ 自身が構成可能としてよい．

存在証明で示した構成可能な素モデルは原子モデルであったから 1 はよい．2 を示すことにする．

$I=\{a_i : i<\aleph_1\}$ を $A$ 上の一様集合とする．$p_i=\mathrm{tp}(a_i/A\cup\{a_j : j<i\})$ とするとき，一様性から $p_i$ はタイプの拡大列になっている．$\varkappa(T)=\aleph_0$（定理131）と分岐の原因は論理式にあることおよび一様性から，有限の $n$ のあとはすべて非分岐拡大になっている：

$$p_n \subset_{\mathrm{nf}} p_i \ (n\leq {}^{\forall} i<\aleph_1).$$

よって，$I-\{a_i : i\leq n\}$ は $A\cup\{a_i : i\leq n\}$ 上の独立集合である．また $p_{n+1}\supset \mathrm{stp}(a_n/A\cup\{a_j : j<n\})$ だから $p_{n+1}$ は定格的である（問題143参照）．したがって $I-\{a_i : i\leq n\}$ は $p_{n+1}$ の Morley 列になっている．必要なら $\{a_0, \ldots, a_n\}$ を拡大して（さらに並べ替えて）$\{a_0, \ldots, a_n\}$ は閉じていると仮定できる．このとき，$M$ は $A^*=A\cup\{a_0, \ldots, a_n\}$ 上の構成列にもなっている（補題233）．したがって $M$ は $A^*$ 上の素モデルである．$M_0$ を $A^*\cup\{a_i : n<i<\omega\}$ 上の素モデルとする．$A^*$-基本写像 $\sigma$ で $M$ を $M_0$ の中に埋め込む．可算集合と従属な元は可算個しかない（問題134）から，$a_\beta$ を

$$\sigma(a_\beta) \underset{A^*}{\downarrow} \{a_i : n<i<\omega\}$$

となるように選べる．このとき，$J=\{a_i : n<i<\omega\}\cup\{\sigma(a_\beta)\}$ は $p_{n+1}$ の Morley 列となっている．適当な $\psi(x, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ によって $\mathrm{tp}(\sigma(a_\beta)/A^*\cup\{a_i : n<i<\omega\})$ は生成されている．特に $\psi(x, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ を満たす元は $\{a_i : n<i<\omega\}$ のどれとも異なる．一方で，$J$ の $A^*$ 上の一様性から，十分大きい $l$ に対して，$\mathrm{tp}(a_l/A^*\cup a_{i_1}{}^\frown\ldots{}^\frown a_{i_k})=\mathrm{tp}(\sigma(a_\beta)/A^*\cup a_{i_1}{}^\frown\ldots{}^\frown a_{i_k})$．

$$\therefore \quad M_0 \models \psi(a_l, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$$

である．これは矛盾である．　□

**補題235（原子性の保存）**　$T$ を $\aleph_0$-安定として，$M$ を $A$ 上の原子モデルとする．$\varphi_i(\bar{x}) \in L(A)$　$(i<\alpha)$ として，$D_i$ を $\varphi_i$ の $M$ での解集合とする $(D_i = \{\bar{d} \in M : M \models \varphi_i(\bar{d})\})$．このとき，$M$ は $A^* = A \cup \bigcup_{i<\alpha} D_i$ 上の原子モデルにもなっている．

**証明：**$\bar{a} \in M$ とする．$\mathrm{tp}(\bar{a}/A^*)$ が孤立タイプになることを示す．$\bar{a}^* \in M$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}^*/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ を満たし，さらに $\mathrm{tp}(\bar{a}^*/A^*)$ が孤立的になるように選ぶ．$T$ が $\aleph_0$-安定だから可能である．$\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(A)$，$\bar{d} \in A^* - A$ を

$$\psi(\bar{x}, \bar{d}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}^*/A^*) \text{ が } \mathrm{tp}(\bar{a}^*/A^*) \text{ を生成する}$$

ように選ぶ．$\bar{d}$ は有限個の $D_i$ で覆われるので，一般性を失うことなく，$\bar{d} \in D_0$ と仮定できる．$\mathrm{tp}(\bar{a}^*/A \cup D_0)$ の定義可能性により，$\theta(\bar{y}, \bar{z}) \in L(A)$ と $\bar{e} \in D_0$ を，

$$M \models \forall \bar{y} \in D_0 [\psi(\bar{a}^*, \bar{y}) \longleftrightarrow \theta(\bar{y}, \bar{e})]$$

となるようにとれる．必要なら $\bar{e}$ を他の元で置き換えて，$\mathrm{tp}(\bar{e}/A \cup \bar{a}^*)$ は孤立的と仮定できる．$\psi^*(\bar{x}, \bar{e})$ を論理式 $\forall \bar{y} \in D_0 [\theta(\bar{y}, \bar{e}) \to \psi(\bar{x}, \bar{y})]$ とする．($D_0$ が $\varphi_0$ の解全体だから論理式になることに注意する.)

**主張**　$M \models \forall \bar{x} [\psi^*(\bar{x}, \bar{e}) \longleftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{d})]$．

**主張の証明：**$M \models \theta(\bar{d}, \bar{e})$ だから，→ はよい．← は以下のように示される：
$\bar{b}$ を任意，$\bar{d}' \in D_0$ として，

$$\begin{aligned} & M \models \psi(\bar{b}, \bar{d}) \wedge \theta(\bar{d}', \bar{e}) \\ \Rightarrow\ & \mathrm{tp}(\bar{b}/A^*) = \mathrm{tp}(\bar{a}^*/A^*) \text{ かつ } M \models \psi(\bar{a}^*, \bar{d}') \\ \Rightarrow\ & M \models \psi(\bar{b}, \bar{d}'). \end{aligned}$$

よって $M \models \psi(\bar{b}, \bar{d}) \to \psi^*(\bar{b}, \bar{e})$ が任意の $\bar{b}$ に対して示されたことになる．　□

主張から，$\psi^*(\bar{x}, \bar{e})$ が $\mathrm{tp}(\bar{a}^*/A^*)$ を生成していることがわかった．$\bar{e}_0 \in D_0$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}^{*\frown}\bar{e}/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}^\frown \bar{e}_0/A)$ となるように $M$ の中から選ぶ．$\mathrm{tp}(\bar{e}/A \cup \bar{a}^*)$ を孤立

的にしておいたからこれは可能である．このとき $\psi^*(\bar{x}, \bar{e}_0)$ が $\mathrm{tp}(\bar{a}/A^*)$ を生成している．（もし生成されない論理式があれば，それを引き戻して，$\psi^*(\bar{x}, \bar{e})$ で生成されない論理式が作れる.）　□

### 9.2.1　素モデルの一意性証明 1

$M$ が $A$ 上許容的（admissible）であるとは，$M$ が $A$ 上の原子モデルで，なおかつ $M$ が $A$ 上の非可算一様集合を含まないこととする．$A$ 上の素モデルは $A$ 上許容的である（命題234）．いま $M_1$ と $M_2$ を $A$ 上許容的なモデルとする．$M_1$ と $M_2$ が $A$ 上同型になることを示せばよい．このために次の(＊)を示す．

(＊)　$M_1$（$M_2$）は $B_1$（$B_2$）上許容的とする．$\sigma_0: B_1 \to B_2$ を全射 $A$-基本写像とする．$\varphi_i(x, \bar{b}_i)$（$i<\alpha$）を $L(B_1)$-論理式として，$D_1$ を $\bigvee_{i<\alpha}\varphi(x, \bar{b}_i)$ の $M_1$ での解集合として，$D_2$ を $\bigvee_{i<\alpha}\varphi(x, \sigma_0(\bar{b}_i))$ の $M_2$ での解集合とする．（ただし $\varphi_i\ (x, \bar{y}_i) \in L$.）このとき $\sigma_0$ を拡大した全射 $A$-基本写像

$$\sigma: B_1 \cup D_1 \to B_2 \cup D_2$$

が存在する．

これが示されれば，$B_1 = B_2 = A$，$\varphi_0(x)$ を $x = x$ として，$M_1$ と $M_2$ の $A$ 上同型を得る．(＊)を $\beta = \max\{\mathrm{RM}(\varphi_i) : i<\alpha\}$ に関する帰納法で示す．$\beta = 0$ ならば明らかである．

$\beta > 0$ の場合を示す．

(i)　$\alpha = 1$，$\mathrm{RM}(\varphi_0(x, \bar{b}_0)) = \beta, \deg(\varphi_0(x, \bar{b}_0)) = 1$：この場合が本質的である．$\varphi_0(x, \bar{b}_0)$ の $\mathrm{S}(\bar{B}_1)$ へのランクを変えない拡大を $p_{B_1}(x)$ とする．$p_{B_2}(x)$（$P_{B_1}$ の $\sigma_0$ によるコピー）もランクを変えない $\varphi_0(x, \sigma_0(\bar{b}_0))$ の拡大である．$I = \{d_i : 1<i<k\} \subset M_1$ を $p_{B_1}$ の極大な Morley 列とする．同様に $p_{B_2}$ に対して $J = \{e_i : 1<i<k\}$ をとる．（$M_i$ の許容性により，$I, J$ ともに高々可算であるが，さらに $M_i$ の $B_i$ 上の原子性により，その個数も一致する.）$k<\omega$ のとき，$\sigma_0(I) = J$ となるようにまず

$\sigma_0$ を拡大する．もちろんこれは基本写像になる．次に $d \in D_1 - I$ に対する行き先を決めなければならない．$I$ が有限だから，$B_1 \cup I$ 上 $M_1$ が許容的である．また，$d \in D_1 - I$ は

$$d \underset{\bar{b}_0}{\downarrow} B_1 \cup I$$

を満たすので，$D_1 - I$ は Morley ランクが $\beta$ 未満の集合の和として表される（定理159参照）．よって帰納法の仮定により，$\sigma_0$ は $\sigma : D_1 \to D_2$（全射）に拡大される．次に $k = \omega$ の場合は，$\sigma_n$ を $d_1, \ldots, d_n \in \mathrm{dom}(\sigma_n), e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{ran}(\sigma_n)$ となるように順次拡大してゆけばよい．方法は $k < \omega$ の場合のそれと同様である．

（ii）　一般の場合：各 $\varphi_i(x, \bar{b}_i)$ を次数＝1の集合に分解しておいて，順に（i）または帰納法の仮定を使って拡大してゆく．（分解は同値関係によってなされる．）このとき補題235を使うことに注意する．　□

### 9.2.2　素モデルの一意性証明 2

まず次の補題を示す：

**補題236（開写像定理（簡略形））**　$T$ を安定とする．$\mathrm{tp}(\bar{a}/B) \supset_{\mathrm{nf}} \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ のとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ が孤立的ならば，$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ も孤立的である．

**証明**：ここでは $T$ が $\aleph_0$-安定のもとで補題を示す．この章に関してはそれで十分である．$M$ を $A$ 上の素モデルとする．$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が孤立的でないとすれば，$\mathrm{tp}(\bar{a})$ は $M$ の中に解を持たない．さらにもし $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ が孤立的とすれば，$\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ によって $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ は生成される．しかし，$\bar{a} \downarrow_A B$ だから，$\varphi(\bar{x})$ は $M$ に解を持つ．すなわち $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が $M$ に解を持ってしまう．これは矛盾である．　□

**主張 1**　$A$ 上の素モデル $M$ は $A$ 上構成可能である．

**主張 1 の証明**：これを示すために，

（＊）　$B \supset A$ が $A$ 上構成可能ならば，$A \subset C \subset B$ なる任意の集合 $C$ は構成可能になる．

を $\kappa = |C - B|$ に関する帰納法で示す．これが示されれば，$A$ 上の素モデルの存在

証明で作ったモデルが $A$ 上構成可能なモデルだったこと，および任意の素モデルはこの構成可能なモデルの中に埋め込めることから，主張1が示されたことになる．

$\varkappa \leq \aleph_0$ の場合は，$C$ の中の有限列は常に $B$ 上の孤立的なタイプを満たす．よって $C-B$ を $\omega$ の順序で並べたものは常に構成列になる．

$\varkappa > \aleph_0$ とする．真の上昇列 $D_i \subset B$ $(i<\varkappa)$ を

1．$D_i = \bigcup_{j<i} D_j$（$i$：極限順序数）；

2．$D_i \downarrow_{C\cap D_i} C$；

3．$D_i$ は閉じている（$\langle D_i \rangle = D_i$）；

4．$|D_i| < \varkappa$.

となるように作る．作り方は以下のようにすればよい．$D_i, |D_i| \leq \lambda < \varkappa$ まで構成されたとする．$D_i$ を真に拡大することを考える．勝手な $B_0 \subset B, |B_0| \leq \lambda$ が与えられたとき，$D_{i+1} = D_i \cup \langle B_0 \rangle$ とすれば，条件3，4は満たされる．しかし条件2はわからない．また，$B_0 \downarrow_{C_0} C$ となる $C_0 \subset C, |C_0| \leq \lambda + \aleph_0$ が存在することは，分岐の有限性と系129によりわかる．したがって $D_{i+1} = D_i \cup B_0 \cup C_0$ とすれば条件2，4は満たされる．この場合は3がわからない．しかし，上記二つの構成を $\omega$ 回繰り返せば，2-4のすべてを満す $D_{i+1}$ を得ることができる．

$D_i$ たちがすべてできたとする．条件3により，$D_{i+1}$ は $D_i$ 上構成可能である（補題233）．帰納法の仮定(＊)を $A$ は $D_i$，$B$ は $D_{i+1}$，そして $C$ は $D_i \cup (C\cap D_{i+1})$ として摘要すれば，$C\cap D_{i+1}$ が $D_i$ 上構成可能なことがわかる．その構成列を $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$ とすれば，

- $\mathrm{tp}(a_\beta / D_i \cup \{a_j : j<\beta\})$ は孤立タイプである．

しかし条件2から $\mathrm{tp}(a_\beta / D_i \cup \{a_j : j<\beta\}) \supset_{nf} \mathrm{tp}(a_\beta / (C\cap D_i) \cup \{a_j : j<\beta\})$ である．したがって開写像定理（補題236）から，各 $\beta$ で，

- $\mathrm{tp}(a_\beta / (C\cap D_i) \cup \{a_j : j<\beta\})$ も孤立タイプとなる．

すなわち，$C\cap D_{i+1}$ は $C\cap D_i$ 上構成可能になる．これがすべての $i$ で成立していて，さらに $C$ は $C\cap D_i$ たちで覆われるから，$C$ が $A$ 上構成可能なことがわかる．□

**主張 2**　$A$ 上構成可能なモデルはすべて $A$ 上同型である．

**主張 2 の証明**：$M_1, M_2$ を $A$ 上構成可能なモデルとする．互いに埋め込めるから，$|M_1 - A| = |M_2 - A|$ である．この等しい濃度 $\varkappa$ が可算ならば問題ない．非可算とする．全単射 $A$-基本写像の拡大列 $\sigma_i : C_i \to D_i$ $(i < \varkappa)$ を，

1．$\sigma_0 = \mathrm{id}_A$；

2．$C_i \subset M_1$，$D_i \subset M_2$

3．$C_i = \bigcup_{j<i} C_j, D_i = \bigcup_{j<i} D_j$ （$i$：極限順序数）；

4．$C_i$ と $D_i$ は（それぞれの順序で）閉じている；

5．$|C_{i+1} - C_i| = \aleph_0, |D_{i+1} - D_i| = \aleph_0$ $(|C_i|, |D_i| \leq |i| + \aleph_0)$

となるように作る．これができれば，$\sigma_i$ たちの和 $\sigma = \bigcup_{i<\varkappa} \sigma_i$ が $M_1$ と $M_2$ の同型を与える．$\sigma_i$ の作り方を以下に示す．$i$ 段階までできたとする．$C_i$ が閉じていることから，$M_1$ は $C_i$ 上構成可能である．特に $C_i$ 上原子的である．$\bar{a}_0 \in M_1 - C_i$ をとれば，$\mathrm{tp}(\bar{a}_0/C_i)$ は孤立的．したがって，$\sigma_{i+1}$ による $\bar{a}_0$ の行く先 $\bar{b}_0 \in M_2 - D_i$ がある．$\bar{b}_1 = \langle b_0 \rangle$ は有限だから同じ議論で，$\bar{b}_1$ の逆像 $\bar{a}_1 \subset M_1$ がある．次に $\bar{a}_2 = \langle \bar{a}_1 \rangle$ の行く先を決める．以下同様に基本写像を少しずつ拡大してゆく．最終的にできたものが $\sigma_{i+1}$ である．$C_{i+1} = C_i \cup \bigcup_{j<\omega} \bar{a}_j, D_{i+1} = D_i \cup \bigcup_{j<\omega} \bar{b}_j$ は閉じていることに注意する．それ以外の条件は自明に成立する．　□

# 第10章　構造解析

本章では $T$ は $\aleph_0$-安定とする．$T$ がある種の条件を満たすときに $T$ のモデルは樹形状に並んだ可算モデルの上の素モデルとして表現することができる．したがって樹形図の数を数えることによりモデルの数の上限がわかる．

次の事実は度々使う：

• 任意の $A$ 上に素モデルが存在する．また $A$ 上の同型を除いて一意的である．

これは定理229の主張であるが，$A$ が可算の場合の一意性は複雑な議論をしなくても，素モデルの原子性を使って簡単に証明できる．また $A$ 上の素モデルで同時に極小なモデル（$A \subset M_0 \preceq M \Longrightarrow M = M_0$ となる $M$）の一意性は $A$ が可算でなくても簡単にわかる．

## 10.1　分解定理

まず樹形分解が可能になるための条件として NDOP という概念を定義する．

記法：モデル $M$ と集合 $A$ が与えられたとき，$M \cup A$ 上の素モデルを $M(A)$ と表わす．素モデルは一意的に決まるものではないから，一つ選んでくるという意味である．（同型なものを同一視すれば定理229によりただ一つである．）$M^* = M(A)$ とかけば，$M^*$ は $M \cup A$ 上の素モデルの一つになっているという意味である．

**定義237（NDOP）**　$T$ が DOP（次元順序，dimensional order property）を持つとは，次のようなモデル $N, M_1, M_2$ および $M = N(M_1 \cup M_2)$ とタイプ $p(x) \in S(M)$ が存在することである：

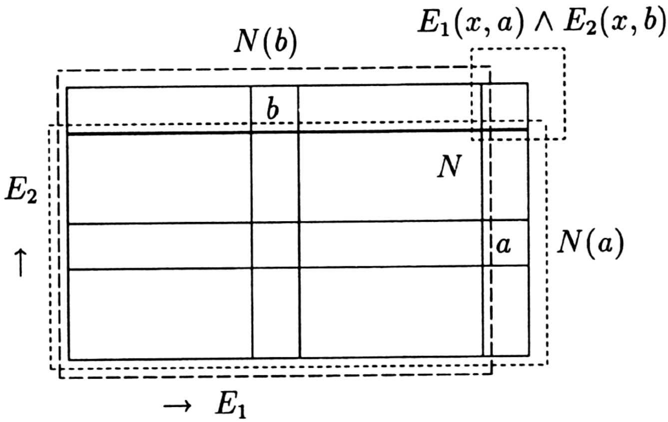
1．$N \prec M_1, M_2$；

2．$M_1 \downarrow_N M_2$；

3．$p \perp M_1$，$p \perp M_2$.

$T$ が DOP を持たないとき，$T$ は NDOP を持つという．

**例238**　$T$ を相互分割同値関係 $E_1, E_2$ の理論とする（例186参照）．$N$ を $T$ のモデルとして，$a$ を $N$ とは同じ $E_1$ 同値類に属さない元として，$b$ を $N$ と同じ $E_2$-同値類に属さない元とする．$M_1 = N(a)$，$M_2 = N(b)$，$M = N_1(N_2) = N(a, b)$ とする．$p(x) \in S(M)$ を $\{E_1(x, a) \wedge E_2(x, b)\} \cup \{x \neq d : d \notin M\}$ で生成されるタイプとする．このとき，$p(x) \perp N_1$，$p(x) \perp N_2$ である．




**定義239**　$I \subset {}^{\omega>}\kappa$ が樹形図（tree）であるとは，$I$ が切片に対して閉じていることである：$\eta \in I \Rightarrow \eta | n \in I$ $({}^{\forall} n \leq \mathrm{lh}(\eta))$．以下で表現を簡潔にするため，列 $\eta$ の最後の元をとり除いた列を $\eta^-$ で表わす．また $\eta^{--} = (\eta^-)^-$ とする．

**定義240（モデルの樹形構造）**　$I \subset {}^{\omega>}\kappa$ を樹形図とする．対

$$(\{M_\eta\}_{\eta \in I}, \{a_\eta\}_{\eta \in I - \{\phi\}})$$

が樹形構造であるとは，次の条件を満たすことである：各 $\eta$ に対して，

1．$\{a_\nu : \nu \in I, \nu^- = \eta\}$ は $M_\eta$ 上の独立な正則元の集合；

2．$M_\eta = M_{\eta^-}(a_\eta)$　(if $\mathrm{lh}(\eta) \geq 1$)；

3．$\mathrm{tp}(a_\eta / M_{\eta^-}) \perp M_{\eta^{--}}$　(if $\mathrm{lh}(\eta) \geq 2$)．

**補題241**　$(\{M_\eta\}_{\eta \in I}, \{a_\eta\}_{\eta \in I - \{\phi\}})$ を樹形構造とする．$\eta \in I$ に対して，$B_\eta = \bigcup \{M_\nu : \eta \subset \nu \in I\}$ とおく．

1．$\{M_{\eta^\frown i} : \eta^\frown i \in I\}$は $M_\eta$ 上独立.

2．$\mathrm{tp}(B_\eta/M_\eta) \perp M_{\eta^-}$.

3．したがって，$\{B_{\eta^\frown i} : \eta^\frown i \in I\}$は $M_\eta$ 上独立である.

**証明：**

1．$a_{\eta^\frown i} \trianglerighteq_{M_\eta} M_\eta(a_{\eta^\frown i})$ による.

2．$B_\eta^n = \bigcup\{M_\nu : \eta \subset \nu \in I, \mathrm{lh}(\nu) - \mathrm{lh}(\eta) \leq n\}$とおく．各 $n \in \omega$ で

$$\mathrm{tp}(B_\eta^n/M_\eta) \perp M_{\eta^-} \quad ({}^\forall \eta \in I) \tag{10.1}$$

が成立することを示せばよい．$n$ まで式10.1が示されたとする．$I_0 = \{\nu \in I : \nu^- = \eta\}$ とすれば，帰納法の仮定から，

$$\mathrm{tp}(B_\nu^n/M_\nu) \perp M_{\nu^-} \quad ({}^\forall \nu \in I_0).$$

したがって，$M_{\nu^-} \supset M_{\eta^-}$ により，

$$\mathrm{tp}(B_\nu^n/M_\nu) \perp M_{\eta^-} \quad ({}^\forall \nu \in I_0).$$

である．また各 $\nu \in I_0$ に対して，$\mathrm{tp}(M_\nu/M_\eta) \perp M_{\eta^-}$ である（定義240の 3 と定理209による）．一般に，

$$\mathrm{tp}(A/B \cup C) \perp D, \mathrm{tp}(B/C) \perp D \Rightarrow \mathrm{tp}(A \cup B/C) \perp D$$

が成立することに注意すると，

$$\mathrm{tp}(B_\nu^n \cup M_\nu/M_\eta) \perp M_{\eta^-} \quad ({}^\forall \nu \in I_0),$$
$$\therefore \mathrm{tp}(B_\nu^n/M_\eta) \perp M_{\eta^-} \quad ({}^\forall \nu \in I_0).$$

1により，$\{M_\nu : \nu \in I_0\}$は $M_\eta$ 上独立である．したがって，$\mathrm{tp}(B_\nu^n/M_\nu) \perp M_\eta$ により，$\{B_\nu^n : \nu \in I_0\}$も $M_\eta$ 上独立．よって，$\mathrm{tp}(\bigcup_{\nu \in I_0} B_\nu^n/M_\eta) \perp M_{\eta^-}$ である[†]．ところで $B_\eta^{n+1} = \bigcup_{\nu \in I_0} B_\nu^n$ だから，$n+1$ に対しても，式10.1が示された．

3は2よりわかる．□

[†] $\{A_i : i < \alpha\}$が $B$ 上独立で，$\mathrm{tp}(A_i/B) \perp C$ $(i < \alpha)$ ならば $\mathrm{tp}(\bigcup_{i<\alpha} A_i/B) \perp C$ となることに注意.

**補題242**　$T$ を NDOP を持つ $\aleph_0$-安定な理論とする．$(\{M_\eta\}_{\eta\in I}, \{a_\eta\}_{\eta\in I-\{\phi\}})$ を樹形構造として，$M$ を $\bigcup_{\eta\in I} M_\eta$ 上の素モデルとする．このとき，

$$p\in S(M) \Rightarrow p \not\perp M_\eta \quad (^\exists \eta\in I)$$

**証明**：$p \supset_{\mathrm{nf}} p|D$ となる有限集合 $D\subset_{\mathrm{fin}} M$ をとる．もちろん，$p\not\perp D$ である．$D$ は有限個の $\eta_1,\ldots,\eta_n\in I$ によって $\mathrm{tp}(D/M_{\eta_1}\cup\ldots\cup M_{\eta_n})$ が孤立的となる．$M_{\eta_1}\cup\ldots\cup M_{\eta_n}$ 上の素モデル $M_\phi(M_{\eta_1}\cup\ldots\cup M_{\eta_n})$ を選んで，$D\subset M_\phi(M_{\eta_1}\cup\ldots\cup M_{\eta_n})$ とできる．したがって，

$$p\not\perp M_\phi(\mathrm{M}_{\eta_1}\cup\ldots\cup M_{\eta_n})$$

を得る．いまこのような $\eta_1,\ldots,\eta_n$ が存在する最小の $n$ を選んでおく．$n=1$ ならばよい．$n>1$ として矛盾を導こう．正則タイプ $r\in S(M_\phi(M_{\eta_1}\cup\ldots\cup M_{\eta_n}))$ を，

$$p\not\perp r$$

となるように選んでおく．いま $\eta_i$ たちは最初の $k-1$ まで同一で，その後分岐するとしよう．$l$ $(1<l\leq n)$，$\nu$ と $\alpha$ を選んで（並べ替えにより），

1．$\eta_i|k=\nu=$一定；

2．$\eta_i(k)=\alpha(i<l)$，$\eta_i(k)\neq\alpha(i\geq l)$

としておく．このとき補題241により，

$$\bigcup_{i<l} M_{\eta_i} \mathop{\downarrow}_{M_\nu} \bigcup_{i\geq l} M_{\eta_i}$$

である．したがって，$M_\phi(\bigcup_{i=1,\ldots,n} M_{\eta_i})$ は $M_\nu(\bigcup_{i<l} M_{\eta_i}))\cup M_\nu(\bigcup_{i\geq l} M_{\eta_i}))$ 上の素モデルとしてよい†．NDOP と $r$ の正則性および $p\not\perp r$ により，

$$r\not\perp \mathrm{S}(M_\nu(\bigcup_{i<l} M_{\eta_i})) \quad \therefore\ p\not\perp \mathrm{S}(M_\nu(\bigcup_{i<l} M_{\eta_i}))$$

または

$$r\not\perp \mathrm{S}(M_\nu(\bigcup_{i\geq l} M_{\eta_i})) \quad \therefore\ p\not\perp S(M_\nu(\bigcup_{i\geq l} M_{\eta_i}))$$

を得る．いずれにせよ，$n$ の最小性に矛盾する結果となる．　□

---

† $A \downarrow_M B$ のとき，$M(A\cup B)=M(M(A)\cup M(B))$ となる $M(A)$ と $M(B)$ があることに注意．

**定理243（分解定理）**　$T$ は $\aleph_0$-安定で NDOP を持つとする．$N \prec M$ に対して，次のような樹形構造 $(\{M_\eta\}_{\eta\in I}, \{a_\eta\}_{\eta\in I-\{\emptyset\}})$ が存在する：

1．$M_\phi = N$；

2．$M$ は $\bigcup_{\eta\in I} M_\eta$ 上の素モデルであり，そのようなモデルの中で極小である．

また $N$ が可算モデルならば，各 $M_\eta$ も可算モデルとなる．

**証明**：樹形構造を作るときに各段階で横幅を極大に作ってゆく．すなわち，樹形構造の定義にさらに次を加えたものを作る：

- 各 $\eta\in I$ に対して，$\{a_\nu : \nu\in I, \nu^- = \eta\}$ は $M_\eta$ 上の正則元の独立集合で，各 $\nu$ が $\mathrm{tp}(a_\nu/M_\eta) \perp M_{\eta^-}$ を満たす中で極大である．

$n$ に関する帰納法で $I_n \subset {}^{n\geq}|M|$ $(I_{n-1}\subset I_n)$ および $a_\eta\,(\eta\in I_n - \{\phi\})$，$M_\eta\,(\eta\in I_n)$ を構成する．$I_0 = \emptyset$，$M_\phi = N$ から始める．また $\{a_i : i\in I_1\} \subset M - M_\phi$ は $(M_\phi$ 上) 独立正則元の極大集合で，$M_i = M_\phi(a_i) \prec M$ とする．$n(>0)$ 番目まで構成されたとして，$\mathrm{lh}(\eta) = n$ とする．$\mathrm{tp}(a/M_\eta) \perp M_{\eta^-}$ を満たす正則元 $a\in M - M_\eta$ が存在しなければ $\eta$ を拡大した枝の構成を止める．そうでないとき，$M_\eta$ 上の正則元の独立集合 $\{a_{\eta^\frown i} : i<\alpha_\eta\} \subset M - M_\eta$ を

$$\mathrm{tp}(a_{\eta^\frown i}/M_\eta) \perp M_\eta \quad (i<\alpha_\eta)$$

を満たす中で極大にとる．また $M_{\eta^\frown i} = M_\eta(a_{\eta^\frown i})$ とする．これを各 $\eta$ で行い，$I_{n+1} = I_n \cup \{\eta^\frown i : \eta\in I_n, i<\alpha_\eta\}$ とする．

$I = \bigcup_{n<\omega} I_n$，$(\{M_\eta\}_{\eta\in I}, \{a_\eta\}_{\eta\in I-\{\phi\}})$ が求める樹形構造になることを示す．樹形構造になっていることはよい．したがって，次を示せばよい：

**主張**　$M$ は $\bigcup_{\eta\in I} M_\eta$ 上の素モデルであり，そのようなモデルの中で極小である．

極小性を示せばよい．そうでないとすれば，$\bigcup_{\eta\in I} M_\eta$ 上の素モデル $M^* \prec M$ で $M$ に一致しないものがある．そのとき正則元 $a\in M - M^*$ が存在するが，補題242により，$\mathrm{tp}(a/M^*) \not\perp M_\nu$ となる $\nu$ が存在．特に $\nu$ の長さ $n<\omega$ はそのような中で一番短いとしておく．このとき，系208と定理209, 190により，$\mathrm{tp}(a/M^*)$ は正則タ

イプ $\mathrm{tp}(a/M_\nu)$ の非分岐拡大としてよい．そのとき，

- $\mathrm{tp}(a/M_\nu) \perp M_{\nu^-}$；
- $\{a_{\nu^\frown i} : \nu^\frown i \in I_{n+1}\} \cup \{a\}$ は $M_\nu$ 上独立

を得るが，これは $\{a_{\nu^\frown i} : \nu^\frown i \in I_{n+1}\}$ の極大性に反する．　□

## 10.2　分解定理の応用—モデルの数

**定義244（樹形図の深度）**　$I \subset {}^{\omega>}\varkappa$ を樹形図とする．

1．$I$ の深度 $\mathrm{Dp}(I)$ が $\infty$（$\mathrm{Dp}(I)=\infty$）であるとは，真の上昇列 $\{\eta_i : i \in \omega\} \subset I$ が存在することである．（すなわち各 $i$ について，$\eta_i \subset \eta_{i+1}$，$\eta_i \neq \eta_{i+1}$.）

2．$\mathrm{Dp}(I) \neq \infty$ のとき，順序数 $\mathrm{Dp}(I)$ を帰納的に定める：

(a)　$\mathrm{Dp}(I) \geq 0$；

(b)　$\mathrm{Dp}(I) \geq \delta+1$（$\delta$ は極限順序数）$\iff$ $\mathrm{Dp}(I) \geq \alpha$（$\forall \alpha < \delta$）；

(c)　$\mathrm{Dp}(I) \geq \alpha+1$（$\alpha$ は極限順序数でない）$\iff$ $\mathrm{Dp}(I_\eta) \geq \alpha$ となる $\eta \in I - \{\emptyset\}$ がある．ただし $I_\eta$ は $\eta$ 以上の $I$ の元の作る樹形図，すなわち $I_\eta = \{\nu : \eta^\frown \nu \in I\}$ のことである；

(d)　$\mathrm{Dp}(I) \geq \alpha$ だが $\mathrm{Dp}(I) \geq \alpha+1$ でないとき，$\mathrm{Dp}(I)=\alpha$ とする．

**注意245**

1．$\mathrm{Dp}(I) \neq \infty$ のとき，順序数 $\mathrm{Dp}(I)$ が定まることに注意する．$\mathrm{Dp}(I) \geq \alpha$（$\forall \alpha$ ：順序数）とならないことはランクの存在（例えば U-ランクの存在と超安定の同値性定理）と同様の議論により示される．

2．$\mathrm{Dp}(I)$ は極限順序数にはならない．これは定義244の 2.b による．その理由はモデルの個数を数えることと関連している．一言で言えば，$2^n$（$n \in \omega$）の極限を $2^{\sup\{n : n \in \omega\}}$ と見るか，それとも $\sup\{2^n : n \in \omega\}$ と見るかによる．我々の見方は前者の方である．

**定義246（理論の深度）**

$\mathrm{Dp}(T)=\sup\{\mathrm{Dp}(I)$：$I$ を添え字集合とするモデルの樹形構造が存在する$\}$.

$\mathrm{Dp}(T)=\infty$ となる $T$ を深度が深い（deep）といい，$\mathrm{Dp}(T)\neq\infty$ となる $T$ を深度が浅い（shallow）という．

**補題247**　$\mathrm{Dp}(T)$ は極限順序数とはならない．

**証明**：$\mathrm{Dp}(T)$ が極限順序数とすれば，各 $\alpha<\mathrm{Dp}(T)$ に対して，深度が $\alpha$ 以上の $I_\alpha$ とそれを添え字に持つ樹形構造

$$(\{M_\eta^\alpha\}_{\eta\in I_\alpha},\{a_\eta^\alpha\}_{\eta\in I_\alpha-\{\phi\}})$$

が存在する．必要なら各 $I_\alpha$ の中の列の第１成分をずらしておくことにより，$\alpha\neq\beta$ のとき，$I_\alpha$ の中の列の第１成分と $I_\beta$ の中の列の第１成分は常に異なるとしてよい．このとき，

$$I=\bigcup_{\alpha<\mathrm{D_p}(T)} I_\alpha$$

が再び樹形図となり，樹形図の深度の定義から，$\mathrm{Dp}(I)\geq\mathrm{Dp}(T)+1$ となる．$I$ を添え字に持つ樹形構造が見つかれば矛盾にいたる．

**場合１**：各 $\alpha<\mathrm{Dp}(T)$ に対する，$M_\phi^\alpha$ が同一のモデル（同型なモデル）$M_\phi$ のとき，$\bigcup_{\eta\in I_\alpha}M_\eta^\alpha$（$\alpha<\mathrm{Dp}(T)$）を $M_\phi$ 上独立になるように動かしておく．このとき $(\{M_\eta\}_{\eta\in I},\{a_\eta\}_{\eta\in I-\{\phi\}})$ が樹形構造になる．ただし $\eta\in I_\alpha$ のとき，$M_\eta=M_\eta^\alpha$, $a_\eta=a_\eta^\alpha$ である．

**場合２**：一般の場合．各 $M_\phi^\alpha$ を少しずつ膨らませて，同じモデル $N_\phi$ にすればよい．このとき他の $M_\eta^\alpha$ たちも $N_\eta=M_\eta^\alpha(N_\phi)$ でとりかえておく．

具体的には以下のように行う．まず次の事実に注目しよう．

$$p\perp A,\mathrm{dom}(p)\underset{A}{\downarrow}B\Rightarrow p\perp A\cup B.$$

証明は簡単なので省略する．$D_\alpha=\bigcup_{\eta\in I_\alpha}M_\eta^\alpha$ として，$\{D_\alpha:\alpha<\mathrm{Dp}(T)\}$ が独立になるように移動しておく．また $N_\phi\supset\bigcup_{\alpha<\mathrm{D_p}(T)}M_\phi^\alpha$ を

$$\bigcup_{\alpha<\mathrm{D_p}(T)} D_\alpha \underset{\bigcup_{\alpha<\mathrm{Dp}(T)} M^\alpha_\phi}{\downarrow} N_\phi$$

となるように選ぶ．このとき，各 $\alpha$ に対して，

$$D_\alpha \downarrow_{M^\alpha_\phi} N_\phi \tag{10.2}$$

が成立する．したがって，各 $\eta^\frown i \in I_\alpha$ に対して，

$$a^\alpha_{\eta^\frown i} \downarrow_{M^\alpha_\eta} M^\alpha_\eta \cup N_\phi$$

$$\therefore\ a^\alpha_{\eta^\frown i} \downarrow_{M^\alpha_\eta} M^\alpha_\eta (N_\phi).$$

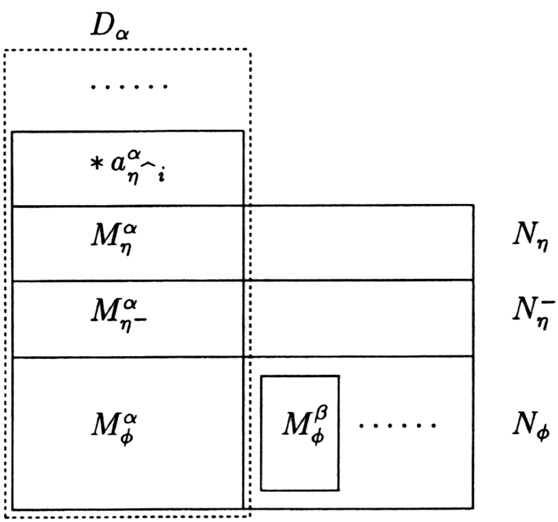
同様の議論で，

$$M^\alpha_\eta \downarrow_{M^\alpha_{\eta^-}} M^\alpha_{\eta^-}(N_\phi)$$

を得る．したがって，上に述べた事実により，$\mathrm{tp}(a_{\eta^\frown i}/M^\alpha_\eta(N_\phi)) \perp M^\alpha_{\eta^-}(N_\phi)$ を得る．このことは，$\eta \in I_\alpha$ に対して $N_\eta = M^\alpha_\eta(N_\phi)$ とすることにより，対

$$(\{N_\eta\}_{\eta\in I}, \{a_\eta\}_{\eta\in I-\{\phi\}})$$

が樹形構造の条件 3 （定義240）を満たすことを示す．



$$N_{\eta^\frown i}=M^{\alpha}_{\eta^\frown i}(N_\phi)=M^{\alpha}_{\eta}(a^{\alpha}_{\eta^\frown i})(N_\phi)$$
$$=M^{\alpha}_{\eta}(N_\phi)(a^{\alpha}_{\eta^\frown i})$$
$$=N_\eta(a^{\alpha}_{\eta^\frown i})$$

により条件２もよい．

補題107により，樹形構造の独立性の条件１も式10.2により保証される． □

**定理248** $T$ は $\aleph_0$-安定で NDOP を持つ深度の浅い理論（$\mathrm{Dp}(T)\neq\infty$）とする．このとき，濃度 $\aleph_\alpha$ のモデルの数 $I(\aleph_\alpha, T)$ は

$$I(\aleph_\alpha, T)\leq\begin{cases}\beth_{\mathrm{Dp}(T)-1}(|\alpha+\omega|^{\omega}) & \mathrm{Dp}(T)<\omega\\ \beth_{\mathrm{Dp}(T)}(|\alpha+\omega|) & \mathrm{Dp}(T)\geq\omega\end{cases}$$

を満たす．ただし $\beth_0(\varkappa)=\varkappa$, $\beth_{\beta+1}(\varkappa)=2^{\beth_\beta(\varkappa)}$, $\beth_\delta(\varkappa)=\sup\{\beth_\beta(\varkappa):\beta<\delta\}$（$\delta$：極限）である．

**証明**：樹形構造（$\{M_\eta\}_{\eta\in I}, \{a_\eta\}_{\eta\in I-\{\phi\}}$）のうち

- $M_\phi=N$
- $\mathrm{Dp}(I)\leq\alpha$；
- $|\bigcup_{\eta\in I}M_\eta|\leq\varkappa$

を満たすもの全体を $TS(N,\alpha,\varkappa)$ とかくことにする．二つの樹形構造

$$(\{M^i_\eta\}_{\eta\in I_i}, \{a^i_\eta\}_{\eta\in I_i-\{\phi\}})\in TS(N,\alpha,\varkappa)\quad(i=1,2)$$

が $N$-同型であるとは，

- $\sigma(M^1_\eta)=M^2_{\sigma_0(\eta)}$ （$\forall\eta\in I_1$）

を満たす樹形図の同型 $\sigma_0: I_1\to I_2$ と $N$-基本写像 $\sigma$ が存在することとする．$N$-同型でない $TS(N,\alpha,\varkappa)$ の個数を $I(N,\alpha,\varkappa)$ とかく．分解定理により濃度 $\varkappa$ 以下のモデルの数の上界は $I(N,\mathrm{Dp}(T),\varkappa)$ によって与えられる．

**主張１** $I(N,n,\aleph_\alpha)\leq\beth_{n-1}(|\alpha+\omega|^{\omega})$ （$n<\omega$）.

**主張１の証明**：$n=1$のとき，$TS(N,1,\aleph_\alpha)$ の元は（$\{N\}\cup\{M_i:i\in\beta\}, \{a_i:i\in\beta\}$），

$\beta \leq \aleph_\alpha$ の形をしている．また $M_i$ たちは $N(a_i)$ の形をしている．したがって素モデルの一意性により，$\mathrm{tp}(M_i/N)$ は $\mathrm{tp}(a_i/N)$ によって決定される．また $a_i$ たちは $N$ 上独立である．よって樹形構造 $(\{N\} \cup \{M_i : i \in \beta\}, \{a_i : i \in \beta\})$ の $N$-同型を除いた個数は各正則タイプ $p(x) \in S(N)$ に対する，

$$d(p) = \left| \{ i \in \beta : a_i \text{ は } p \text{ の解} \} \right|$$

によって決定される．$d(p)$ のとり得る値は

$$\underbrace{0, 1, \ldots, \aleph_0}_{\omega}, \underbrace{\aleph_1, \ldots, \aleph_\alpha}_{\alpha}$$

の $|\alpha + \omega|$ 通りである．したがって関数 $d(*)$ の種類は

$$|\alpha + \omega|^{|S(N)|} = |\alpha + \omega|^\omega = \beth_0(|\alpha + \omega|^\omega)$$

だけしかない．

$n+1$ のとき，$TS(N, n+1, \aleph_\alpha)$ に属する樹形構造 $(\{M_\eta\}_{\eta \in I}, \{a_\eta\}\eta_{\in I - \{\phi\}})$ は，各 $i$ に対する $M_i$ とその上の樹形構造

$$\mathcal{S}_i = (\{M_{i^\frown \eta}\}_{i^\frown \eta \in I}, \{a_{i^\frown \eta}\}_{i^\frown \eta \in I - \{i\}}) \in TS(M_i, n, \aleph_\alpha)$$

によって決まる．これは $\mathcal{S}_i$ たちが $N$ 上独立だから $\mathcal{S}_i$ たちのタイプさえ決定されれば $\bigcup_i \mathcal{S}_i$ のタイプも決定されるからである．したがって $I(N, n+1, \aleph_\alpha)$ は $(N(a), \mathcal{S})$ $(\mathcal{S} \in TS(N(a), n, \aleph_\alpha))$ に対する関数 $d(N(a), \mathcal{S}) = \left| \{ i : (M_i, \mathcal{S}_i) \simeq (N(a), \mathcal{S}) \} \right|$ の個数で抑えられる．帰納法の仮定を使うと，$n=1$ の場合と同様にして，

$$「d \text{ の種類」} \leq |\alpha + \omega|^{|S(N)| \cdot \beth_{n-1}(|\alpha + \omega|^\omega)} \leq \beth_n(|\alpha + \omega|^\omega)$$

を得る．　□

**主張 2**　$I(N, \beta, \aleph_\alpha) \leq \beth_\beta(|\alpha + \omega|^\omega)$（極限順序数でない $\beta \geq \omega$）．

**主張 2 の証明**：考察すべき最小の場合は $\beta = \omega + 1$ のときである．主張 1 の証明の後半と同様の記号を用いる．$d$ の種類がいくつあるかを調べることで上界が得られ

るが，

$$「d\text{ の種類」} \leq |\alpha+\omega|^{|S(N)|\cdot\sup\{\beth_n(|\alpha+\omega|^{\omega})\,:\,n\in\omega\}} \leq \beth_{\omega+1}(|\alpha+\omega|)$$

となるので $\beta=\omega+1$ の場合はよい．$\beta$ が極限順序数の次の順序数の場合は上と同様である．$\beta$ が極限順序数の次でないときは主張 1 と同様の証明である（sup を考えないのでより易しい）． □

**主張 3**　$N_0$ を $\emptyset$ 上の素モデルとするとき，$I(\varkappa, T) \leq I(N_0, \mathrm{Dp}(T), \varkappa)$.

**主張 3 の証明：**濃度 $\varkappa$ の任意のモデル $M$ の中に素モデル $N_0$ は埋め込めるので，$M$ は $TS(N_0, \mathrm{Dp}(T), \varkappa)$ の適当な元 $S$ 上の極小の素モデルとなる．（定理243）

□

**主張 4**　$$I(\aleph_\alpha, T) \leq \begin{cases} \beth_{\mathrm{Dp}(T)-1}(|\alpha+\omega|^{\omega}) & \mathrm{Dp}(T)<\omega \\ \beth_{\mathrm{Dp}(T)}(|\alpha+\omega|) & \mathrm{Dp}(T)\geq\omega. \end{cases}$$

**主張 4 の証明：**主張 3 により $I(N_0, \mathrm{D_p}(T), \aleph_\alpha)$ を調べればよい．$\mathrm{D_p}(T)<\omega$ の場合は主張 1 により主張は正しい．$\mathrm{D_p}(T)\geq\omega$ のときは，$\mathrm{D_p}(T)$ が極限順序数にならないことから，主張 2 を使えばよい． □

**問題249**　GCH を仮定する．T を $\aleph_0$-安定で NDOP を持つ理論とする．$\mathrm{D_p}(T)=n<\omega$ のとき，$I(\aleph_\omega, T)\leq\aleph_n$ を示せ．

# 文　献　表

[ 1 ] J. T. Baldwin, *Classification Theory*, Lecture Notes in Mathematics 1292, Springer-Verlag, 1985.

[ 2 ] J. T. Baldwin, *Fundamentals of Stability Theory*, Springer-Verlag, 1988.

[ 3 ] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts*, North-Holland, 1969.

[ 4 ] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory* (3-rd Edition), North-Holland, 1973.

[ 5 ] W. Hodges, *Model Theory*, Encyclopedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1993.

[ 6 ] D. Lascar, *Stability in Model Theory* (tanslated from French), Longman Science Technical, 1987.

[ 7 ] 本橋信義，情報時代の論理，日本評論社，1992.

[ 8 ] A. Nesin and A. Pillay, *The Model Theory of Groups*, University of Notre Dame Press, 1989.

[ 9 ] A. Pillay, *An Introduction to Stability Theory*, Oxford Logic Guides 8, Clarendon Press・Oxford, 1983.

[10] B. Poizat, *Groups Stables*, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah (ISBN 2-9500919-1-1), 1987.

[11] G. Sacks, *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin, Inc., 1972.

[12] 斉藤正彦，超積と超準解析，東京図書，1976.

[13] **S. Shelah**, *Classification Theory* (Revised Edition), North-Holland, 1990.

[14] 坪井明人，最近のモデル理論，「数学」(日本数学会邦文誌)，1995，47巻1号，62頁-72頁.

本書を読んだ後には，なんといっても Shelah[13]である．Shelah は現代のモデル論を築いた人物である．聖書と呼ばれている書であるから是非一度は見てみるこ

と（読んでみるのは無理でも）をお勧めする．しかし数カ月読んでも何の事やら意味が分からなければ，きっと能力を越えているのだから，無理せず他の本（例えば[2]）を読んでみるのがよい．[9]と[6]は最終的な到達点において本書とあまり変わらない．しかし，本書で省略した概念も説明してある．[11]は現代の表現とは多少異なることもあるがよい本である．

本書はできる限り self-contained を目指したつもりであるが，もし Part I の範囲でもう少し詳しい説明が欲しいのならば，[4]または[3]を読んでみるのがよいであろう．さらにそれ以前のところが釈然としない場合は[7]がよい入門書となるだろう．

安定性理論というよりモデル論の一般的応用としては，ノンスタンダード・アナリシス[12]がある．群論への安定性理論の応用としては，[10]（仏語）がある．[14]は本書の Part I と Part II の内容の一部を簡単に説明したものである．

もしも最近の論文を直接あたりたい場合は，[2]あるいは[5]の後の文献表を参考にして欲しい．あるいは Shelah と Hrushovski という名前をキーワードにして雑誌（例えば Journal of Symbolic Logic, Annals of Pure and Applied Logic）から直接捜してみるのも一つの方法である．Hrushovski は Shelah とは異なった方法論（異なった視点）で重要な結果を出している人物である．例えば[1]の中に収録されている Locally Modular Regular Types は重要な結果の一つである．

なお最近では安定という条件よりも弱い Simple という条件のもとで安定性理論の一般化が試みられている．

# 索　引

## A-Z 行

## あ　行



## か　行



## さ　行



## た　行

**著者略歴**

**坪井明人**（つぼい　あきと）

| | |
|---|---|
| 1955年 | 東京都昭島市生まれ |
| 1979年 | 東京大学理学部数学科卒 |
| 1985年 | 筑波大学大学院博士課程<br>数学専攻修了 |
| 1985年 | 筑波大学数学系助手 |
| 現　在 | 同大学助教授 |


**モデルの理論**

1997年 2 月25日　第 1 刷発行

著者　坪井明人 ©

発行　河合文化教育研究所
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL (052) 735-1706

発売　㈱河合出版
〒151 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-1-6
TEL (03) 3354-1481
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL (052) 735-1575

印刷 製本　㈱あるむ

ISBN 4-87999-968-7

# 数学の古典探訪シリーズ

河合ブックレット
数学シリーズ

## 1 古典へのプレリュード　倉田令二朗著　定価 824 円

Ⅰ 複素数　Ⅱ 3次, 4次方程式　Ⅲ 初等整数論入門　Ⅳ有限群論入門

## 2 古典へのインターリュード　倉田令二朗著　定価 824 円

Ⅴ 多項式　Ⅵ 多項式の根　Ⅶ 環と体　Ⅷ 対称式と対称量　Ⅸ 代数体

## 3 ガウス2次形式論(1)　倉田令二朗著　定価 1339 円

Ⅰ 基本概念と基本問題　Ⅱ 判別式が負の場合　Ⅲ 判別式が正の非平方根の場合　Ⅳ 判別式が平方根の場合, その他. Disquisitiones Arithmeticae 153～222条の詳細な紹介と解説

## 4 ガロア方程式論(1)　倉田令二朗著　定価 824 円

Ⅰ ルフィニ, ヴァンツェル, アーベルの不可能証明　Ⅱ ガロア分解式, 分解体　Ⅲ ガロア群　Ⅳ ガロアの理論　Ⅴ 素数次既約方程式(ガロア第1論文の詳細な展開)

## 5 ガウス初等整数論　倉田令二朗著　定価 1339 円

Disquisitiones Arithmeticae I～IV (合同式から平方剰余の相互法則まで)の多面的な検討

## 6 ガウス円分方程式論　倉田令二朗著　定価 824 円

Disquisitiones Arithmeticae 338～366条の詳細な紹介と解説. 付・巡回方程式

## 7 ガウス2次形式論(2)　倉田令二朗著　定価 1339 円

2次形式の合成, 3元2次形式論

## 10 微分方程式の話　斎藤利弥著　定価 1339 円

微分方程式論の基本定理を通して, 微積分学の美しさとパワーについて語る

## 11 複素関数論入門　斎藤利弥著　定価 1400 円

## 12 ゲーデルの夢　竹内外史著　定価 1400 円